PHẦN I: ĐỀ BÀI

1. Chứng minh $\sqrt{7}$ là số vô tỉ.
2. a) Chứng minh : $(ac + bd)^2 + (ad – bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$
b) Chứng minh bất dẳng thức Bunhiacôpxki : $(ac + bd)^2 \le (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$
3. Cho x + y = 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $S = x^2 + y^2$.
4. a) Cho $a \ge 0$, $b \ge 0$. Chứng minh bất đẳng thức Cauchy : $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$.
b) Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng : $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \ge a + b + c$
c) Cho a, b > 0 và 3a + 5b = 12. Tìm giá trị lớn nhất của tích P = ab.
5. Cho a + b = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $M = a^3 + b^3$.
6. Cho $a^3 + b^3 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : N = a + b.
7. Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh : $a^3 + b^3 + abc \ge ab(a + b + c)$
8. Tìm liên hệ giữa các số a và b biết rằng : $|a+b| > |a-b|$
9. a) Chứng minh bất đẳng thức $(a + 1)^2 \ge 4a$
b) Cho a, b, c > 0 và abc = 1. Chứng minh : $(a + 1)(b + 1)(c + 1) \ge 8$
10. Chứng minh các bất đẳng thức :
a) $(a + b)^2 \le 2(a^2 + b^2)$ **b)** $(a + b + c)^2 \le 3(a^2 + b^2 + c^2)$
11. Tìm các giá trị của x sao cho :
a) $| 2x – 3 | = | 1 – x |$ **b)** $x^2 – 4x \le 5$ **c)** $2x(2x – 1) \le 2x – 1$.
12. Tìm các số a, b, c, d biết rằng : $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a(b + c + d)$
13. Cho biểu thức $M = a^2 + ab + b^2 – 3a – 3b + 2001$. Với giá trị nào của a và b thì M đạt giá trị nhỏ nhất ? Tìm giá trị nhỏ nhất đó.
14. Cho biểu thức $P = x^2 + xy + y^2 – 3(x + y) + 3$. CMR giá trị nhỏ nhất của P bằng 0.
15. Chứng minh rằng không có giá trị nào của x, y, z thỏa mãn đẳng thức sau :
$$x^2 + 4y^2 + z^2 – 2a + 8y – 6z + 15 = 0$$
16. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : $A = \frac{1}{x^2 - 4x + 9}$
17. So sánh các số thực sau (không dùng máy tính) :
a) $\sqrt{7} + \sqrt{15}$ và 7 **b)** $\sqrt{17} + \sqrt{5} + 1$ và $\sqrt{45}$
c) $\frac{23 - 2\sqrt{19}}{3}$ và $\sqrt{27}$ **d)** $\sqrt{3\sqrt{2}}$ và $\sqrt{2\sqrt{3}}$
18. Hãy viết một số hữu tỉ và một số vô tỉ lớn hơn $\sqrt{2}$ nhưng nhỏ hơn $\sqrt{3}$
19. Giải phương trình : $\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 21} = 5 - 2x - x^2$.
20. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = x^2y$ với các điều kiện x, y > 0 và 2x + xy = 4.
21. Cho $S = \frac{1}{\sqrt{1.1998}} + \frac{1}{\sqrt{2.1997}} + ... + \frac{1}{\sqrt{k(1998 - k + 1)}} + ... + \frac{1}{\sqrt{1998 - 1}}$.
Hãy so sánh S và $2.\frac{1998}{1999}$.
22. Chứng minh rằng : Nếu số tự nhiên a không phải là số chính phương thì $\sqrt{a}$ là số vô tỉ.
23. Cho các số x và y cùng dấu. Chứng minh rằng :

a) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2$

b) $\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)-\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\ge 0$

c) $\left(\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{x^4}\right)-\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\ge 2$.

24. Chứng minh rằng các số sau là số vô tỉ :

a) $\sqrt{1+\sqrt{2}}$

b) $m+\frac{\sqrt{3}}{n}$ với m, n là các số hữu tỉ, $n \neq 0$.

25. Có hai số vô tỉ dương nào mà tổng là số hữu tỉ không ?

26. Cho các số x và y khác 0. Chứng minh rằng : $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+4\ge 3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$.

27. Cho các số x, y, z dương. Chứng minh rằng : $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\ge \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$.

28. Chứng minh rằng tổng của một số hữu tỉ với một số vô tỉ là một số vô tỉ.

29. Chứng minh các bất đẳng thức :

a) $(a + b)^2 \le 2(a^2 + b^2)$

b) $(a + b + c)^2 \le 3(a^2 + b^2 + c^2)$

c) $(a_1 + a_2 + \ldots.. + a_n)^2 \le n(a_1^2 + a_2^2 + \ldots.. + a_n^2)$.

30. Cho $a^3 + b^3 = 2$. Chứng minh rằng $a + b \le 2$.

31. Chứng minh rằng : $[x]+[y]\le[x+y]$.

32. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : $A=\frac{1}{x^2-6x+17}$.

33. Tìm giá trị nhỏ nhất của : $A=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$ với $x, y, z > 0$.

34. Tìm giá trị nhỏ nhất của : $A = x^2 + y^2$ biết $x + y = 4$.

35. Tìm giá trị lớn nhất của : $A = xyz(x + y)(y + z)(z + x)$ với $x, y, z \ge 0$; $x + y + z = 1$.

36. Xét xem các số a và b có thể là số vô tỉ không nếu :

a) ab và $\frac{a}{b}$ là số vô tỉ.

b) a + b và $\frac{a}{b}$ là số hữu tỉ $(a + b \neq 0)$

c) a + b, a^2 và b^2 là số hữu tỉ $(a + b \neq 0)$

37. Cho a, b, c > 0. Chứng minh : $a^3 + b^3 + abc \ge ab(a + b + c)$

38. Cho a, b, c, d > 0. Chứng minh : $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\ge 2$

39. Chứng minh rằng $[2x]$ bằng $2[x]$ hoặc $2[x]+1$

40. Cho số nguyên dương a. Xét các số có dạng : a + 15 ; a + 30 ; a + 45 ; … ; a + 15n. Chứng minh rằng trong các số đó, tồn tại hai số mà hai chữ số đầu tiên là 96.

41. Tìm các giá trị của x để các biểu thức sau có nghĩa :

$A=\sqrt{x^2-3}$ $B=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4x-5}}$ $C=\dfrac{1}{\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}}$ $D=\dfrac{1}{1-\sqrt{x^2-3}}$ $E=\sqrt{x+\dfrac{2}{x}}+\sqrt{-2x}$

$G=\sqrt{3x-1}-\sqrt{5x-3}+\sqrt{x^2+x+1}$

42. **a)** Chứng minh rằng : $|A+B|\le|A|+|B|$. Dấu **" = "** xảy ra khi nào ?

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau : $M=\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-6x+9}$.

c) Giải phương trình : $\sqrt{4x^2+20x+25}+\sqrt{x^2-8x+16}=\sqrt{x^2+18x+81}$

43. Giải phương trình : $2x^2-8x-3\sqrt{x^2-4x-5}=12$.

44. Tìm các giá trị của x để các biểu thức sau có nghĩa :

$A=\sqrt{x^2+x+2}$ $B=\dfrac{1}{\sqrt{1-3x}}$ $C=2-\sqrt{1-9x^2}$ $D=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-5x+6}}$

$E=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1+\sqrt{x}}}$ $G=\dfrac{x}{x^2-4}+\sqrt{x-2}$ $H=\sqrt{x^2-2x-3}+3\sqrt{1-x^2}$

45. Giải phương trình : $\dfrac{x^2-3x}{\sqrt{x-3}}=0$

46. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $A=\sqrt{x}+x$.

47. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : $B=\sqrt{3-x}+x$

48. So sánh : **a)** $a=\sqrt{2+\sqrt{3}}$ và $b=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$ **b)** $\sqrt{5-\sqrt{13+4\sqrt{3}}}$ và $\sqrt{3}-1$

c) $\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}$ và $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ (n là số nguyên dương)

49. Với giá trị nào của x, biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất : $A=1-\sqrt{1-6x+9x^2}+(3x-1)^2$.

50. Tính : a) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ b) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$ c) $\sqrt{27-10\sqrt{2}}$

d) $A=\sqrt{m^2+8m+16}+\sqrt{m^2-8m+16}$ e) $B=\sqrt{n+2\sqrt{n-1}}+\sqrt{n-2\sqrt{n-1}}$ (n ≥ 1)

51. Rút gọn biểu thức : $M=\dfrac{8\sqrt{41}}{\sqrt{45+4\sqrt{41}}+\sqrt{45-4\sqrt{41}}}$.

52. Tìm các số x, y, z thỏa mãn đẳng thức : $(2x-y)^2+(y-2)^2+\sqrt{(x+y+z)^2}=0$

53. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P=\sqrt{25x^2-20x+4}+\sqrt{25x^2-30x+9}$.

54. Giải các phương trình sau :

a) $\sqrt{x^2-x-2}-\sqrt{x-2}=0$ b) $\sqrt{x^2-1}+1=x^2$ c) $\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+x-2}=0$

d) $x-\sqrt{x^4-2x^2+1}=1$ e) $\sqrt{x^2+4x+4}+|x-4|=0$ g) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}=-5$

h) $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}=1$ i) $\sqrt{x+5}+\sqrt{2-x}=x^2-25$

k) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$ l) $\sqrt{8x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{7x+4}+\sqrt{2x-2}$

55. Cho hai số thực x và y thỏa mãn các điều kiện : $xy = 1$ và $x > y$. CMR: $\frac{x^2+y^2}{x-y} \ge 2\sqrt{2}$.

56. Rút gọn các biểu thức :

a) $\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$ b) $\sqrt{m+2\sqrt{m-1}}+\sqrt{m-2\sqrt{m-1}}$

c) $\sqrt{2+\sqrt{3}}.\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}.\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}.\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$ d) $\sqrt{227-30\sqrt{2}}+\sqrt{123+22\sqrt{2}}$

57. Chứng minh rằng $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

58. Rút gọn các biểu thức :

a) $C = \frac{\sqrt{6+2\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}-\sqrt{6-2\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}}{\sqrt{2}}$ b) $D = \frac{\sqrt{9-6\sqrt{2}}-\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$.

59. So sánh :

a) $\sqrt{\sqrt{6+\sqrt{20}}}$ và $\sqrt{1+\sqrt{6}}$ b) $\sqrt{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}$ và $\sqrt{2}+1$ c) $\sqrt{\sqrt{28-16\sqrt{3}}}$ và $\sqrt{3}-2$

60. Cho biểu thức : $A = \sqrt{x-\sqrt{x^2-4x+4}}$

a) Tìm tập xác định của biểu thức A.
b) Rút gọn biểu thức A.

61. Rút gọn các biểu thức sau : a) $\sqrt{11-2\sqrt{10}}$ b) $\sqrt{9-2\sqrt{14}}$

c) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{5+2\sqrt{6}}}{\sqrt{2}+\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{7+2\sqrt{10}}}$

62. Cho a + b + c = 0 ; a, b, c ≠ 0. Chứng minh đẳng thức : $\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}} = \left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right|$

63. Giải bất phương trình : $\sqrt{x^2-16x+60} < x-6$.

64. Tìm x sao cho : $\sqrt{x^2-3}+3 \le x^2$.

65. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $A = x^2 + y^2$, biết rằng :

$$x^2(x^2 + 2y^2 - 3) + (y^2 - 2)^2 = 1 \quad (1)$$

66. Tìm x để biểu thức có nghĩa:

a) $A = \frac{1}{\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}}$ b) $B = \frac{\sqrt{16-x^2}}{\sqrt{2x+1}}+\sqrt{x^2-8x+8}$.

67. Cho biểu thức : $A = \frac{x+\sqrt{x^2-2x}}{x-\sqrt{x^2-2x}}-\frac{x-\sqrt{x^2-2x}}{x+\sqrt{x^2-2x}}$.

a) Tìm giá trị của x để biểu thức A có nghĩa.
b) Rút gọn biểu thức A. c) Tìm giá trị của x để A < 2.

68. Tìm 20 chữ số thập phân đầu tiên của số : $\sqrt{0,9999....9}$ (20 chữ số 9)

69. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của : $A = | x - \sqrt{2} | + | y – 1 |$ với $| x | + | y | = 5$

70. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x^4 + y^4 + z^4$ biết rằng $xy + yz + zx = 1$

71. Trong hai số : $\sqrt{n}+\sqrt{n+2}$ và $2\sqrt{n+1}$ (n là số nguyên dương), số nào lớn hơn ?

72. Cho biểu thức $A=\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$. Tính giá trị của A theo hai cách.

73. Tính : $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})$

74. Chứng minh các số sau là số vô tỉ : $\sqrt{3}+\sqrt{5}$; $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}+3$

75. Hãy so sánh hai số : $a=3\sqrt{3}-3$ và $b=2\sqrt{2}-1$; $\sqrt{2+\sqrt{5}}$ và $\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}$

76. So sánh $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{2}$ và số 0.

77. Rút gọn biểu thức : $Q=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$.

78. Cho $P=\sqrt{14+\sqrt{40}+\sqrt{56}+\sqrt{140}}$. Hãy biểu diễn P dưới dạng tổng của 3 căn thức bậc hai

79. Tính giá trị của biểu thức x^2+y^2 biết rằng : $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1$.

80. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của : $A=\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}$.

81. Tìm giá trị lớn nhất của : $M=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$ với a, b > 0 và $a+b\le 1$.

82. CMR trong các số $2b+c-2\sqrt{ad}$; $2c+d-2\sqrt{ab}$; $2d+a-2\sqrt{bc}$; $2a+b-2\sqrt{cd}$ có ít nhất hai số dương (a, b, c, d > 0).

83. Rút gọn biểu thức : $N=\sqrt{4\sqrt{6}+8\sqrt{3}+4\sqrt{2}+18}$.

84. Cho $x+y+z=\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}$, trong đó x, y, z > 0. Chứng minh x = y = z.

85. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ và $a_1a_2\dots a_n=1$. Chứng minh: $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)\ge 2^n$.

86. Chứng minh : $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2\ge 2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}$ $(a, b\ge 0)$.

87. Chứng minh rằng nếu các đoạn thẳng có độ dài a, b, c lập được thành một tam giác thì các đoạn thẳng có độ dài $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ cũng lập được thành một tam giác.

88. Rút gọn : **a)** $A=\dfrac{\sqrt{ab}-\sqrt{b^2}}{b}-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ **b)** $B=\dfrac{\sqrt{(x+2)^2-8x}}{\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}}$.

89. Chứng minh rằng với mọi số thực a, ta đều có : $\dfrac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}\ge 2$. Khi nào có đẳng thức ?

90. Tính : $A=\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}$ bằng hai cách.

91. So sánh : a) $\dfrac{3\sqrt{7}+5\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ và 6,9 b) $\sqrt{13}-\sqrt{12}$ và $\sqrt{7}-\sqrt{6}$

92. Tính : $P=\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

93. Giải phương trình : $\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x-2-\sqrt{2x-5}}=2\sqrt{2}$.

94. Chứng minh rằng ta luôn có : $P_n=\dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$; $\forall n\in \mathbf{Z}_+$

95. Chứng minh rằng nếu a, b > 0 thì $\sqrt{a}+\sqrt{b}\le\sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}$.

96. Rút gọn biểu thức : $A=\frac{\sqrt{x-\sqrt{4(x-1)}}+\sqrt{x+\sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2-4(x-1)}}.\left(1-\frac{1}{x-1}\right)$.

97. Chứng minh các đẳng thức sau : a) $\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}:\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=a-b$ (a, b > 0 ; a ≠ b)

b) $\left(\frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{1-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}}\right):\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=-2$ c) $\left(1+\frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\right)\left(1-\frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\right)=1-a$ (a > 0).

98. Tính : a) $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-6\sqrt{20}}}}$; b) $2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$.

c) $\left(\sqrt{\sqrt{7+\sqrt{48}}}-\sqrt{\sqrt{28-16\sqrt{3}}}\right).\sqrt{\sqrt{7+\sqrt{48}}}$.

99. So sánh : a) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ và $\sqrt{15}$ b) $2+\sqrt{15}$ và $\sqrt{12}+\sqrt{7}$

c) $\sqrt{18}+\sqrt{19}$ và 9 d) $\frac{16}{\sqrt{2}}$ và $\sqrt{5}.\sqrt{25}$

100. Cho hằng đẳng thức :

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\quad (a, b > 0 \text{ và } a^2-b>0).$$

Áp dụng kết quả để rút gọn :

a) $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$; b) $\frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}}-\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}$

c) $\sqrt{\frac{2\sqrt{10}+\sqrt{30}-2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2\sqrt{10}-2\sqrt{2}}}:\frac{2}{\sqrt{3}-1}$

101. Xác định giá trị các biểu thức sau :

a) $A=\frac{xy-\sqrt{x^2-1}.\sqrt{y^2-1}}{xy+\sqrt{x^2-1}.\sqrt{y^2-1}}$ với $x=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$, $y=\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)$ (a > 1 ; b > 1)

b) $B=\frac{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a-bx}}$ với $x=\frac{2am}{b\left(1+m^2\right)}$, $|m|<1$.

102. Cho biểu thức $P(x)=\frac{2x-\sqrt{x^2-1}}{3x^2-4x+1}$

a) Tìm tất cả các giá trị của x để P(x) xác định. Rút gọn P(x).

b) Chứng minh rằng nếu x > 1 thì P(x).P(- x) < 0.

103. Cho biểu thức $A=\frac{\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+2+4\sqrt{x-2}}}{\sqrt{\frac{4}{x^2}-\frac{4}{x}+1}}$.

a) Rút gọn biểu thức A.
b) Tìm các số nguyên x để biểu thức A là một số nguyên.

104. Tìm giá trị lớn nhất (nếu có) hoặc giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các biểu thức sau:

a) $\sqrt{9-x^2}$ b) $\sqrt{x}-x\ \ (x>0)$ c) $1+\sqrt{2-x}$ d) $\sqrt{x-5}-4$

e) $1-2\sqrt{1-3x}$ g) $\sqrt{2x^2-2x+5}$ h) $1-\sqrt{-x^2+2x+5}$ i) $\dfrac{1}{2x-\sqrt{x}+3}$

105. Rút gọn biểu thức : $A=\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}-\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$, bằng ba cách ?

106. Rút gọn các biểu thức sau : a) $\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}$

b) $\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ c) $\sqrt{94-42\sqrt{5}}-\sqrt{94+42\sqrt{5}}$.

107. Chứng minh các hằng đẳng thức với $b\ge 0$; $a\ge\sqrt{b}$

a) $\sqrt{a+\sqrt{b}}\pm\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{2\left(a\pm\sqrt{a^2-b}\right)}$

b) $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$

108. Rút gọn biểu thức : $A=\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}+\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}$

109. Tìm x và y sao cho : $\sqrt{x+y-2}=\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{2}$

110. Chứng minh bất đẳng thức : $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\ge\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$.

111. Cho a, b, c > 0. Chứng minh : $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}\ge\dfrac{a+b+c}{2}$.

112. Cho a, b, c > 0 ; a + b + c = 1. Chứng minh :

a) $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1}<3,5$ b) $\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\le\sqrt{6}$.

113. CM : $\sqrt{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)}+\sqrt{\left(a^2+d^2\right)\left(b^2+d^2\right)}\ge(a+b)(c+d)$ với a, b, c, d > 0.

114. Tìm giá trị nhỏ nhất của : $A=x+\sqrt{x}$.

115. Tìm giá trị nhỏ nhất của : $A=\dfrac{(x+a)(x+b)}{x}$.

116. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $A = 2x + 3y$ biết $2x^2 + 3y^2 \le 5$.

117. Tìm giá trị lớn nhất của $A = x + \sqrt{2-x}$.

118. Giải phương trình : $\sqrt{x-1}-\sqrt{5x-1}=\sqrt{3x-2}$

119. Giải phương trình : $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$

120. Giải phương trình : $3x^2+21x+18+2\sqrt{x^2+7x+7}=2$

121. Giải phương trình : $\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-2x-x^2$

122. Chứng minh các số sau là số vô tỉ : $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}+\sqrt{3}$

123. Chứng minh $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\le 2$.

124. Chứng minh bất đẳng thức sau bằng phương pháp hình học :

$$\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{b^2+c^2}\ge b(a+c) \quad \text{với a, b, c > 0.}$$

125. Chứng minh $\sqrt{(a+b)(c+d)} \ge \sqrt{ac} + \sqrt{bd}$ với a, b, c, d > 0.

126. Chứng minh rằng nếu các đoạn thẳng có độ dài a, b, c lập được thành một tam giác thì các đoạn thẳng có độ dài $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ cũng lập được thành một tam giác.

127. Chứng minh $\frac{(a+b)^2}{2} + \frac{a+b}{4} \ge a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$ với a, b ≥ 0.

128. Chứng minh $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$ với a, b, c > 0.

129. Cho $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1$. Chứng minh rằng $x^2 + y^2 = 1$.

130. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}$

131. Tìm GTNN, GTLN của $A = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$.

132. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2 - 2x + 5}$

133. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \sqrt{-x^2 + 4x + 12} - \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$.

134. Tìm GTNN, GTLN của : a) $A = 2x + \sqrt{5 - x^2}$ b) $A = x\left(99 + \sqrt{101 - x^2}\right)$

135. Tìm GTNN của A = x + y biết x, y > 0 thỏa mãn $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$ (a và b là hằng số dương).

136. Tìm GTNN của A = (x + y)(x + z) với x, y, z > 0 , xyz(x + y + z) = 1.

137. Tìm GTNN của $A = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}$ với x, y, z > 0 , x + y + z = 1.

138. Tìm GTNN của $A = \frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x}$ biết x, y, z > 0 , $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 1$.

139. Tìm giá trị lớn nhất của : a) $A = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$ với a, b > 0 , a + b ≤ 1

b) $B = \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^4 + \left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)^4 + \left(\sqrt{a}+\sqrt{d}\right)^4 + \left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^4 + \left(\sqrt{b}+\sqrt{d}\right)^4 + \left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)^4$

với a, b, c, d > 0 và a + b + c + d = 1.

140. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = 3^x + 3^y$ với x + y = 4.

141. Tìm GTNN của $A = \frac{b}{c+d} + \frac{c}{a+b}$ với b + c ≥ a + d ; b, c > 0 ; a, d ≥ 0.

142. Giải các phương trình sau :

a) $x^2 - 5x - 2\sqrt{3x} + 12 = 0$ b) $x^2 - 4x = 8\sqrt{x-1}$ c) $\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x+4} = 1$

d) $\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1} = 2$ e) $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-1} = 1$ g) $\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}} = \sqrt{2}$

h) $\sqrt{x + 2 - 4\sqrt{x-2}} + \sqrt{x + 7 - 6\sqrt{x-2}} = 1$ i) $\sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{1-x}} = 1$

k) $\sqrt{1 - \sqrt{x^2 - x}} = \sqrt{x} - 1$ l) $\sqrt{2x^2 + 8x + 6} + \sqrt{x^2 - 1} = 2x + 2$

m) $\sqrt{x^2 + 6} = x - 2\sqrt{x^2 - 1}$ n) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+10} = \sqrt{x+2} + \sqrt{x+5}$

o) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} + 2\sqrt{(x-1)(x^2 - 3x + 5)} = 4 - 2x$

p) $\sqrt{2x+3+\sqrt{x+2}}+\sqrt{2x+2-\sqrt{x+2}}=1+2\sqrt{x+2}$.

q) $\sqrt{2x^2-9x+4}+3\sqrt{2x-1}=\sqrt{2x^2+21x-11}$

143. Rút gọn biểu thức : $A=\left(2\sqrt{2}-\sqrt{5}+3\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{18}-\sqrt{20}+2\sqrt{2}\right)$.

144. Chứng minh rằng, $\forall n \in \mathbf{Z}_+$, ta luôn có : $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+....+\frac{1}{\sqrt{n}}>2\left(\sqrt{n+1}-1\right)$.

145. Trục căn thức ở mẫu : a) $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{5}}$ b) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$.

146. Tính :

a) $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-6\sqrt{20}}}}$ b) $\sqrt{6+2\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$ c) $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$

147. Cho $a=\sqrt{3-\sqrt{5}}.\left(3+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)$. Chứng minh rằng a là số tự nhiên.

148. Cho $b=\frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}}-\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}$. b có phải là số tự nhiên không ?

149. Giải các phương trình sau :

a) $\left(\sqrt{3}-1\right)x-x+4-\sqrt{3}=0$ b) $\left(\sqrt{3}-1\right)x=2\left(\sqrt{3}+1\right)x-3\sqrt{3}$

c) $\frac{(5-x)\sqrt{5-x}+(x-3)\sqrt{x-3}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x-3}}=2$ d) $x+\sqrt{x-5}=5$

150. Tính giá trị của biểu thức :

$M=\sqrt{\left|12\sqrt{5}-29\right|}+\sqrt{25+4\sqrt{21}}-\sqrt{12\sqrt{5}+29}-\sqrt{25-4\sqrt{21}}$

151. Rút gọn : $A=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$.

152. Cho biểu thức : $P=\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{5}}-...+\frac{1}{\sqrt{2n}-\sqrt{2n+1}}$

a) Rút gọn P. b) P có phải là số hữu tỉ không ?

153. Tính : $A=\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+...+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$.

154. Chứng minh : $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$.

155. Cho $a=\sqrt{17}-1$. Hãy tính giá trị của biểu thức: $A=(a^5+2a^4-17a^3-a^2+18a-17)^{2000}$.

156. Chứng minh : $\sqrt{a}-\sqrt{a-1}<\sqrt{a-2}-\sqrt{a-3}$ $(a\geq 3)$

157. Chứng minh : $x^2-\sqrt{x}+\frac{1}{2}>0$ $(x\geq 0)$

158. Tìm giá trị lớn nhất của $S=\sqrt{x-1}+\sqrt{y-2}$, biết x + y = 4.

159. Tính giá trị của biểu thức sau với $a=\frac{\sqrt{3}}{4}$: $A=\frac{1+2a}{1+\sqrt{1+2a}}+\frac{1-2a}{1-\sqrt{1-2a}}$.

160. Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $\left(4+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\sqrt{4-\sqrt{15}}=2$ b) $\sqrt{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}=\sqrt{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}+1\right)$

c) $\sqrt{3-\sqrt{5}}\left(3+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)=8$ d) $\sqrt{\sqrt{7+\sqrt{48}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$ e) $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}=\sqrt{5}-2$

161. Chứng minh các bất đẳng thức sau :

a) $\sqrt{27}+\sqrt{6}>\sqrt{48}$ b) $\dfrac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}+\dfrac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}-\sqrt{10}<0$

c) $\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{1+\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}-1}{1+\sqrt{3}-\sqrt{5}}\right)\left(\sqrt{3}-4\sqrt{\dfrac{1}{3}}+2\right)\sqrt{0,2}-\sqrt{1,01}>0$

d) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{2+\sqrt{6}}+\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{6}}+\dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{6}}\right)-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{3-\sqrt{2}}>0$

e) $\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{\sqrt{2}-1}}+\sqrt{\sqrt{2}-2\sqrt{\sqrt{2}-1}}>1,9$ g) $\sqrt{\sqrt{17+12\sqrt{2}}-\sqrt{2}}>\sqrt{3}-1$

h) $\left(\sqrt{\sqrt{3}}+\sqrt{\sqrt{5}}+\sqrt{\sqrt{7}}\right)-\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)<3$ i) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{2}}+\sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}<0,8$

162. Chứng minh rằng : $2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}$. Từ đó suy ra:

$$2004<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{1006009}}<2005$$

163. Trục căn thức ở mẫu : a) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+4}$ b) $\dfrac{3}{2+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$.

164. Cho $x=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ và $y=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$. Tính $A = 5x^2 + 6xy + 5y^2$.

165. Chứng minh bất đẳng thức sau : $\dfrac{2002}{\sqrt{2003}}+\dfrac{2003}{\sqrt{2002}}>\sqrt{2002}+\sqrt{2003}$.

166. Tính giá trị của biểu thức : $A=\dfrac{x^2-3xy+y^2}{x+y+2}$ với $x=3+\sqrt{5}$ và $y=3-\sqrt{5}$.

167. Giải phương trình : $\dfrac{6x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{1-x}}=3+2\sqrt{x-x^2}$.

168. Giải bất các pt :

a) $3\sqrt{3+5x}\ge\sqrt{72}$ b) $\dfrac{1}{4}\sqrt{10x-14}\ge 1$ c) $\sqrt{2+2\sqrt{2+\sqrt{2x}}}\ge 4$.

169. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $A=\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}$ b) $B=\sqrt{1-a}+\sqrt{a(a-1)}+a\sqrt{\dfrac{a-1}{a}}$

c) $C=\dfrac{x+3+2\sqrt{x^2-9}}{2x-6+\sqrt{x^2-9}}$ d) $D=\dfrac{x^2+5x+6+x\sqrt{9-x^2}}{3x-x^2+(x+2)\sqrt{9-x^2}}$

$$E = \frac{1}{\sqrt{1}-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}} - ... - \frac{1}{\sqrt{24}-\sqrt{25}}$$

170. Tìm GTNN và GTLN của biểu thức $A = \dfrac{1}{2-\sqrt{3-x^2}}$.

171. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \dfrac{2}{1-x} + \dfrac{1}{x}$ với $0 < x < 1$.

172. Tìm GTLN của : a) $A = \sqrt{x-1} + \sqrt{y-2}$ biết x + y = 4 ;

b) $B = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x} + \dfrac{\sqrt{y-2}}{y}$

173. Cho $a = \sqrt{1997} - \sqrt{1996}$; $b = \sqrt{1998} - \sqrt{1997}$. So sánh a với b, số nào lớn hơn ?

174. Tìm GTNN, GTLN của :

a) $A = \dfrac{1}{5+2\sqrt{6-x^2}}$ b) $B = \sqrt{-x^2+2x+4}$.

175. Tìm giá trị lớn nhất của $A = x\sqrt{1-x^2}$.

176. Tìm giá trị lớn nhất của $A = |x - y|$ biết $x^2 + 4y^2 = 1$.

177. Tìm GTNN, GTLN của $A = x^3 + y^3$ biết $x, y \geq 0$; $x^2 + y^2 = 1$.

178. Tìm GTNN, GTLN của $A = x\sqrt{x} + y\sqrt{y}$ biết $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

179. Giải phương trình : $\sqrt{1-x} + \sqrt{x^2-3x+2} + (x-2)\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}} = 3$.

180. Giải phương trình : $x^2 + 2x - 9 = \sqrt{6+4x+2x^2}$.

181. CMR, $\forall n \in \mathbf{Z}_+$, ta có : $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3\sqrt{2}} + \dfrac{1}{4\sqrt{3}} + ... + \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2$.

182. Cho $A = \dfrac{1}{\sqrt{1.1999}} + \dfrac{1}{\sqrt{2.1998}} + \dfrac{1}{\sqrt{3.1997}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{1999.1}}$. Hãy so sánh A và 1,999.

183. Cho 3 số x, y và $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ là số hữu tỉ. Chứng minh rằng mỗi số $\sqrt{x}$; $\sqrt{y}$ đều là số hữu tỉ

184. Cho $a = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - 2\sqrt{6}$; $b = \sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}}$. CMR : a, b là các số hữu tỉ.

185. Rút gọn biểu thức : $P = \left(\dfrac{2+\sqrt{a}}{a+2\sqrt{a}+1} - \dfrac{\sqrt{a}-2}{a-1}\right).\dfrac{a\sqrt{a}+a-\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}$

(a >0 ; a ≠ 1)

186. Chứng minh : $\left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} + 4\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a} - \dfrac{1}{\sqrt{a}}\right) = 4a$. (a > 0 ; a ≠ 1)

187. Rút gọn : $\dfrac{\sqrt{(x+2)^2-8x}}{\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}}$ (0 < x < 2)

188. Rút gọn : $\left(\sqrt{a}+\dfrac{b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\left(\dfrac{a}{\sqrt{ab}+b}+\dfrac{b}{\sqrt{ab}-a}-\dfrac{a+b}{\sqrt{ab}}\right)$

189. Giải bất phương trình : $2\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\le\dfrac{5a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$ $(a\neq 0)$

190. Cho $A=\left(1-a^2\right):\left[\left(\dfrac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)\left(\dfrac{1+a\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)\right]+1$

a) Rút gọn biểu thức A. b) Tính giá trị của A với a = 9.

c) Với giá trị nào của a thì | A | = A.

191. Cho biểu thức : $B=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-1}{a+\sqrt{ab}}+\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2\sqrt{ab}}\left(\dfrac{\sqrt{b}}{a-\sqrt{ab}}+\dfrac{\sqrt{b}}{a+\sqrt{ab}}\right)$.

a) Rút gọn biểu thức B. b) Tính giá trị của B nếu $a=6+2\sqrt{5}$.
c) So sánh B với -1.

192. Cho $A=\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}}\right):\left(1+\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}\right)$

a) Rút gọn biểu thức A. b) Tìm b biết | A | = -A.
c) Tính giá trị của A khi $a=5+4\sqrt{2}$; $b=2+6\sqrt{2}$.

193. Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+4\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm giá trị của A nếu $a=\dfrac{\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}}$. c) Tìm giá trị của a để $\sqrt{A}>A$.

194. Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right)\left(\dfrac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}-\dfrac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\right)$.

a) Rút gọn biểu thức A. b) Tìm giá trị của A để A = - 4

195. Thực hiện phép tính : $A=\left(\sqrt{\dfrac{1+a}{1-a}}+\sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}\right):\left(\sqrt{\dfrac{1+a}{1-a}}-\sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}\right)$

196. Thực hiện phép tính : $B=\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

197. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $A=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{xy\sqrt{xy}}:\left[\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right).\dfrac{1}{x+y+2\sqrt{xy}}+\dfrac{2}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^3}.\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}\right)\right]$

với $x=2-\sqrt{3}$; $y=2+\sqrt{3}$.

b) $B=\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x^2-y^2}}-\sqrt{x-\sqrt{x^2-y^2}}}{\sqrt{2(x-y)}}$ với $x>y>0$

c) $C = \dfrac{2a\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}$ với $x = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{1-a}{a}} - \sqrt{\dfrac{a}{1-a}}\right)$; $0 < a < 1$

`d) $D = (a+b) - \sqrt{\dfrac{(a^2+1)(b^2+1)}{c^2+1}}$ với a, b, c > 0 và ab + bc + ca = 1

e) $E = \dfrac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}}.\sqrt{2x-1}$

198. Chứng minh : $\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x}}} + \sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x}}} = \sqrt{\dfrac{2x+4}{\sqrt{x}}}$ với $x \geq 2$.

199. Cho $a = \dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}$, $b = \dfrac{-1-\sqrt{2}}{2}$. Tính $a^7 + b^7$.

200. Cho $a = \sqrt{2} - 1$

`

a) Viết a^2 ; a^3 dưới dạng $\sqrt{m} - \sqrt{m-1}$, trong đó m là số tự nhiên.

b) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, số a^n viết được dưới dạng trên.

201. Cho biết $x = \sqrt{2}$ là một nghiệm của phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ với các hệ số hữu tỉ. Tìm các nghiệm còn lại.

202. Chứng minh $2\sqrt{n} - 3 < \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2$ với $n \in N$; $n \geq 2$.

203. Tìm phần nguyên của số $\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6}+\sqrt{6}}}$ (có 100 dấu căn).

204. Cho $a = 2 + \sqrt{3}$. Tính a) $\left[a^2\right]$ b) $\left[a^3\right]$.

205. Cho 3 số x, y, $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ là số hữu tỉ. Chứng minh rằng mỗi số $\sqrt{x}, \sqrt{y}$ đều là số hữu tỉ

206. CMR, $\forall n \geq 1$, $n \in N$: $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3\sqrt{2}} + \dfrac{1}{4\sqrt{3}} + ... + \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2$

207. Cho 25 số tự nhiên a_1 , a_2 , a_3 , … a_{25} thỏa đk : $\dfrac{1}{\sqrt{a_1}} + \dfrac{1}{\sqrt{a_2}} + \dfrac{1}{\sqrt{a_3}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{a_{25}}} = 9$. Chứng minh rằng trong 25 số tự nhiên đó tồn tại 2 số bằng nhau.

208. Giải phương trình $\dfrac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{x}}} + \dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{x}}} = \sqrt{2}$.

209. Giải và biện luận với tham số a $\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = \sqrt{a}$.

210. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x}(1+y) = 2y \\ \sqrt{y}(1+z) = 2z \\ \sqrt{z}(1+x) = 2x \end{cases}$

211. Chứng minh rằng :

a) Số $\left(8+3\sqrt{7}\right)^{7}$ có 7 chữ số 9 liền sau dấu phẩy.

b) Số $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{10}$ có mười chữ số 9 liền sau dấu phẩy.

212. Kí hiệu a_n là số nguyên gần $\sqrt{n}$ nhất $(n \in N^*)$, ví dụ :

$\sqrt{1}=1 \Rightarrow a_1=1$; $\sqrt{2}\approx 1,4 \Rightarrow a_2=1$; $\sqrt{3}\approx 1,7 \Rightarrow a_3=2$; $\sqrt{4}=2 \Rightarrow a_4=2$

Tính : $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+...+\dfrac{1}{a_{1980}}$.

213. Tìm phần nguyên của các số (có n dấu căn) : a) $a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$

b) $a_n=\sqrt{4+\sqrt{4+...+\sqrt{4+\sqrt{4}}}}$ c) $a_n=\sqrt{1996+\sqrt{1996+...+\sqrt{1996+\sqrt{1996}}}}$

214. Tìm phần nguyên của A với $n \in N$: $A=\sqrt{4n^2+\sqrt{16n^2+8n+3}}$

215. Chứng minh rằng khi viết số $x=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{200}$ dưới dạng thập phân, ta được chữ số liền trước dấu phẩy là 1, chữ số liền sau dấu phẩy là 9.

216. Tìm chữ số tận cùng của phần nguyên của $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{250}$.

217. Tính tổng $A=\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\left[\sqrt{3}\right]+...+\left[\sqrt{24}\right]$

218. Tìm giá trị lớn nhất của $A = x^2(3 - x)$ với $x \ge 0$.

219. Giải phương trình : a) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{7-x}=2$ b) $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+1}=3$.

220. Có tồn tại các số hữu tỉ dương a, b không nếu : **a)** $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt[4]{2}$.

221. Chứng minh các số sau là số vô tỉ : a) $\sqrt[3]{5}$ b) $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$

222. Chứng minh bất đẳng thức Cauchy với 3 số không âm : $\dfrac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc}$.

223. Cho a, b, c, d > 0. Biết $\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}+\dfrac{c}{1+c}+\dfrac{d}{1+d}\le 1$. Chứng minh rằng : $abcd\le\dfrac{1}{81}$.

224. Chứng minh bất đẳng thức : $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{z^2}+\dfrac{z^2}{x^2}\ge\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}$ với $x, y, z > 0$

225. Cho $a=\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}$; $b=2\sqrt[3]{3}$. Chứng minh rằng : a < b.

226. a) Chứng minh với mọi số nguyên dương n, ta có : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}<3$.

b) Chứng minh rằng trong các số có dạng $\sqrt[n]{n}$ (n là số tự nhiên), số $\sqrt[3]{3}$ có giá trị lớn nhất

227. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}$.

228. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x^2(2 - x)$ biết $x \le 4$.

229. Tìm giá trị lớn nhất của $A=x^2\sqrt{9-x^2}$.

230. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $A = x(x^2 - 6)$ biết $0 \le x \le 3$.

231. Một miếng bìa hình vuông có cạnh 3 dm. Ở mỗi góc của hình vuông lớn, người ta cắt đi một hình vuông nhỏ rồi gấp bìa để được một cái hộp hình hộp chữ nhật không nắp. Tính cạnh hình vuông nhỏ để thể tích của hộp là lớn nhất.

232. Giải các phương trình sau :

a) $1+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x+3}$ b) $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1$

c) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{5x}$ d) $2\sqrt[3]{2x-1}=x^3+1$

e) $\sqrt[3]{\dfrac{x^3-3x-\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-4}}{2}}=2-\sqrt{3}$ g) $\dfrac{\sqrt[3]{7-x}-\sqrt[3]{x-5}}{\sqrt[3]{7-x}+\sqrt[3]{x-5}}=6-x$

h) $\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x^2-1}=1$ i) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0$

k) $\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{1+x}+\sqrt[4]{1-x}=3$ l) $\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{b-x}=\sqrt[4]{a+b-2x}$ (a, b là tham số)

233. Rút gọn $A=\dfrac{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$.

234. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $A=\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+x+1}$

235. Xác định các số nguyên a, b sao cho một trong các nghiệm của phương trình : $3x^3+ax^2+bx+12=0$ là $1+\sqrt{3}$.

236. Chứng minh $\sqrt[3]{3}$ là số vô tỉ.

237. Làm phép tính : a) $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}.\sqrt[6]{3-2\sqrt{2}}$ b) $\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}.\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

238. Tính : $a=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

239. Chứng minh : $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-2\sqrt{5}}=2$.

240. Tính : $A=\left(\sqrt[4]{7+\sqrt{48}}-\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}\right).\sqrt[4]{7+\sqrt{48}}$.

241. Hãy lập phương trình f(x) = 0 với hệ số nguyên có một nghiệm là : $x=\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$.

242. Tính giá trị của biểu thức : $M=x^3+3x-14$ với $x=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}}$.

243. Giải các phương trình : a) $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{25-x}=3$.

b) $\sqrt[3]{x-9}=(x-3)^2+6$ c) $\sqrt{x^2+32}-2\sqrt[4]{x^2+32}=3$

244. Tìm GTNN của biểu thức : $A=\sqrt{x^3+2\left(1+\sqrt{x^3+1}\right)}+\sqrt{x^3+2\left(1-\sqrt{x^3+1}\right)}$.

245. Cho các số dương a, b, c, d. Chứng minh : $a+b+c+d\ \geq\ 4\sqrt[4]{abcd}$.

246. Rút gọn : $P=\dfrac{8-x}{2-\sqrt[3]{x}}:\left(2+\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{2+\sqrt[3]{x}}\right)+\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2}\right)\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}}\right)$;

Voi $x>0$, $x\neq 8$

247. CMR : $x=\sqrt[3]{5-\sqrt{17}}+\sqrt[3]{5+\sqrt{17}}$ là nghiệm của phương trình $x^3-6x-10=0$.

248. Cho $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4-\sqrt{15}}}+\sqrt[3]{4-\sqrt{15}}$. Tính giá trị biểu thức $y=x^3-3x+1987$.

249. Chứng minh đẳng thức : $\dfrac{a+\sqrt{2+\sqrt{5}}.\sqrt{\sqrt{9-4\sqrt{5}}}}{\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}.\sqrt[3]{\sqrt{9+4\sqrt{5}}}-\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}}=-\sqrt[3]{a}-1$.

250. Chứng minh bất đẳng thức : $\left(\sqrt[3]{\sqrt{9+4\sqrt{5}}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right).\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}-2{,}1<0$.

251. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $A=\dfrac{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$ b) $\left(\dfrac{b}{b+8}-\dfrac{4b}{\left(\sqrt[3]{b}+2\right)^3}\right).\left(\dfrac{1+2\sqrt[3]{\dfrac{1}{b}}}{1-2.\dfrac{1}{\sqrt[3]{b}}}\right)-\dfrac{24}{b+8}$

c) $C=\left(\dfrac{a\sqrt[3]{a}-2a\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{a^2b^2}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}}+\dfrac{\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}\right).\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$.

252. Cho $M=\sqrt{x^2-4a+9}+\sqrt{x^2-4x+8}$. Tính giá trị của biểu thức M biết rằng:

$$\sqrt{x^2-4x+9}-\sqrt{x^2-4x+8}=2.$$

253. Tìm giá trị nhỏ nhất của : $P=\sqrt{x^2-2ax+a^2}+\sqrt{x^2-2bx+b^2}$ $(a < b)$

254. Chứng minh rằng, nếu a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác thì :

$$abc \ge (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$$

255. Tìm giá trị của biểu thức $|x - y|$ biết $x + y = 2$ và $xy = -1$

256. Biết $a - b = \sqrt{2} + 1$, $b - c = \sqrt{2} - 1$, tìm giá trị của biểu thức :

$$A = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca.$$

257. Tìm x, y, z biết rằng : $x+y+z+4=2\sqrt{x-2}+4\sqrt{y-3}+6\sqrt{z-5}$.

258. Cho $y=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$. CMR, nếu $1 \le x \le 2$ thì giá trị của y là một hằng số.

259. Phân tích thành nhân tử : $M=7\sqrt{x-1}-\sqrt{x^3-x^2}+x-1$ $(x \ge 1)$.

260. Trong tất cả các hình chữ nhật có đường chéo bằng $8\sqrt{2}$, hãy tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

261. Cho tam giác vuông ABC có các cạnh góc vuông là a, b và cạnh huyền là c. Chứng minh rằng ta luôn có : $c \ge \dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$.

262. Cho các số dương a, b, c, a', b', c'. Chứng minh rằng :

Nếu $\sqrt{aa'}+\sqrt{bb'}+\sqrt{cc'}=\sqrt{(a+b+c)(a'+b'+c')}$ thì $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$.

263. Giải phương trình : $|x^2 - 1| + |x^2 - 4| = 3$.

264. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức C không phụ thuộc vào x, y :

$$C=\dfrac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}-\dfrac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)}-\dfrac{x+y}{2\sqrt{x}\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{(x+y)^4}}{4xy} \quad \text{với } x > 0 ; y > 0.$$

265. Chứng minh giá trị biểu thức D không phụ thuộc vào a:

$$D=\left(\frac{2+\sqrt{a}}{a+2\sqrt{a}+1}-\frac{\sqrt{a}-2}{a-1}\right)\frac{a\sqrt{a}+a-\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}\quad \text{với } a>0\ ;\ a\neq 1$$

266. Cho biểu thức $B=\left(\sqrt{a}+\frac{c-\sqrt{ac}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}\right)-\frac{1}{\frac{a}{\sqrt{ac}+c}+\frac{c}{\sqrt{ac}-a}-\frac{a+c}{\sqrt{ac}}}$.

a) Rút gọn biểu thức B.
b) Tính giá trị của biểu thức B khi c = 54 ; a = 24
c) Với giá trị nào của a và c để B > 0 ; B < 0.

267. Cho biểu thức : $A=\left(\sqrt{m+\frac{2mn}{1+n^2}}+\sqrt{m-\frac{2mn}{1+n^2}}\right)\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$ với $m\geq 0$; $n\geq 1$

a) Rút gọn biểu thức A. **b)** Tìm giá trị của A với $m=\sqrt{56+24\sqrt{5}}$.
c) Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

268. Rút gọn

$$D=\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}-\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}-1+x}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}-\frac{1-x}{x}\right)\frac{x}{1-x+\sqrt{1-x^2}}$$

269. Cho $P=\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1}\right):\left(1-\frac{2\sqrt{x}}{x+1}\right)$ với $x\geq 0$; $x\neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P. **b)** Tìm x sao cho P < 0.

270. Xét biểu thức $y=\frac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}+1-\frac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

a) Rút gọn y. Tìm x để y = 2.
b) Giả sử x > 1. Chứng minh rằng : y - | y | = 0
c) Tìm giá trị nhỏ nhất của y ?

PHẦN II: HƯỚNG DẪN GIẢI

1. Giả sử $\sqrt{7}$ là số hữu tỉ $\Rightarrow \sqrt{7}=\frac{m}{n}$ (tối giản). Suy ra $7=\frac{m^2}{n^2}$ hay $7n^2=m^2$ (1). Đẳng thức này chứng tỏ $m^2 \vdots 7$ mà 7 là số nguyên tố nên m $\vdots$ 7. Đặt m = 7k ($k\in Z$), ta có $m^2 = 49k^2$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $7n^2 = 49k^2$ nên $n^2 = 7k^2$ (3). Từ (3) ta lại có $n^2 \vdots 7$ và vì 7 là số nguyên tố nên n $\vdots$ 7. m và n cùng chia hết cho 7 nên phân số $\frac{m}{n}$ không tối giản, trái giả thiết. Vậy $\sqrt{7}$ không phải là số hữu tỉ; do đó $\sqrt{7}$ là số vô tỉ.

2. Khai triển vế trái và đặt nhân tử chung, ta được vế phải. Từ a) $\Rightarrow$ b) vì $(ad - bc)^2 \geq 0$.

3. *Cách 1* : Từ x + y = 2 ta có y = 2 – x. Do đó : $S = x^2 + (2 - x)^2 = 2(x - 1)^2 + 2 \geq 2$.
Vậy min S = 2 $\Leftrightarrow$ x = y = 1.

Cách 2 : Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki với a = x, c = 1, b = y, d = 1, ta có :
$(x + y)^2 \le (x^2 + y^2)(1 + 1) \Leftrightarrow 4 \le 2(x^2 + y^2) = 2S \Leftrightarrow S \ge 2. \Rightarrow$ mim S = 2 khi x = y = 1

4. b) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các cặp số dương $\frac{bc}{a}$ và $\frac{ca}{b}$; $\frac{bc}{a}$ và $\frac{ab}{c}$; $\frac{ca}{b}$ và $\frac{ab}{c}$,

ta lần lượt có:

$\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \ge 2\sqrt{\frac{bc}{a}.\frac{ca}{b}} = 2c$; $\frac{bc}{a} + \frac{ab}{c} \ge 2\sqrt{\frac{bc}{a}.\frac{ab}{c}} = 2b$; $\frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \ge 2\sqrt{\frac{ca}{b}.\frac{ab}{c}} = 2a$ cộng từng vế ta được bất đẳng thức cần chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi a = b = c.

c) Với các số dương 3a và 5b , theo bất đẳng thức Cauchy ta có : $\frac{3a + 5b}{2} \ge \sqrt{3a.5b}$.

$\Leftrightarrow (3a + 5b)^2 \ge 4.15P$ (vì P = a.b) $\Leftrightarrow 12^2 \ge 60P \Leftrightarrow P \le \frac{12}{5} \Rightarrow \max P = \frac{12}{5}$.

Dấu bằng xảy ra khi 3a = 5b = 12 : 2 $\Leftrightarrow$ a = 2 ; b = 6/5.

5. Ta có b = 1 – a, do đó $M = a^3 + (1 - a)^3 = 3(a - ½)^2 + ¼ \ge ¼$. Dấu "=" xảy ra khi a = ½ .
Vậy min M = ¼ $\Leftrightarrow$ a = b = ½ .

6. Đặt $a = 1 + x \Rightarrow b^3 = 2 - a^3 = 2 - (1 + x)^3 = 1 - 3x - 3x^2 - x^3 \le 1 - 3x + 3x^2 - x^3 = (1 - x)^3$.
Suy ra : $b \le 1 - x$. Ta lại có a = 1 + x, nên : $a + b \le 1 + x + 1 - x = 2$.
Với a = 1, b = 1 thì $a^3 + b^3 = 2$ và a + b = 2. Vậy max N = 2 khi a = b = 1.

7. Hiệu của vế trái và vế phải bằng $(a - b)^2(a + b)$.

8. Vì $| a + b | \ge 0$, $| a - b | \ge 0$, nên : $| a + b | > | a - b | \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \ge a^2 - 2ab + b^2$
$\Leftrightarrow 4ab > 0 \Leftrightarrow ab > 0$. Vậy a và b là hai số cùng dấu.

9. a) Xét hiệu : $(a + 1)^2 - 4a = a^2 + 2a + 1 - 4a = a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2 \ge 0$.
b) Ta có : $(a + 1)^2 \ge 4a$; $(b + 1)^2 \ge 4b$; $(c + 1)^2 \ge 4c$ và các bất đẳng thức này có hai vế đều dương, nên : $[(a + 1)(b + 1)(c + 1)]^2 \ge 64abc = 64.1 = 8^2$. Vậy $(a + 1)(b + 1)(c + 1) \ge 8$.

10. a) Ta có : $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$. Do $(a - b)^2 \ge 0$, nên $(a + b)^2 \le 2(a^2 + b^2)$.
b) Xét : $(a + b + c)^2 + (a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2$. Khai triển và rút gọn, ta được :
$3(a^2 + b^2 + c^2)$. Vậy : $(a + b + c)^2 \le 3(a^2 + b^2 + c^2)$.

11. a) $|2x - 3| = |1 - x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 3 = 1 - x \\ 2x - 3 = x - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = 4 \\ x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{4}{3} \\ x = 2 \end{array}\right.$

b) $x^2 - 4x \le 5 \Leftrightarrow (x - 2)^2 \le 3^3 \Leftrightarrow | x - 2 | \le 3 \Leftrightarrow -3 \le x - 2 \le 3 \Leftrightarrow -1 \le x \le 5$.
c) $2x(2x - 1) \le 2x - 1 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 \le 0$. Nhưng $(2x - 1)^2 \ge 0$, nên chỉ có thể : 2x – 1 = 0
Vậy : x = ½ .

12. Viết đẳng thức đã cho dưới dạng : $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - ac - ad = 0$ (1). Nhân hai vế của (1) với 4 rồi đưa về dạng : $a^2 + (a - 2b)^2 + (a - 2c)^2 + (a - 2d)^2 = 0$ (2). Do đó ta có :
a = a – 2b = a – 2c = a – 2d = 0 . Suy ra : a = b = c = d = 0.

13. $2M = (a + b - 2)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + 2.1998 \ge 2.1998 \Rightarrow M \ge 1998$.

Dấu " = " xảy ra khi có đồng thời : $\begin{cases} a + b - 2 = 0 \\ a - 1 = 0 \\ b - 1 = 0 \end{cases}$ Vậy min M = 1998 $\Leftrightarrow$ a = b = 1.

14. Giải tương tự bài 13.

15. Đưa đẳng thức đã cho về dạng : $(x - 1)^2 + 4(y - 1)^2 + (x - 3)^2 + 1 = 0$.

16. $A = \frac{1}{x^2 - 4x + 9} = \frac{1}{(x - 2)^2 + 5} \le \frac{1}{5}$. max A$=\frac{1}{5} \Leftrightarrow x = 2$.

17. a) $\sqrt{7}+\sqrt{15}<\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$. Vậy $\sqrt{7}+\sqrt{15}<7$

b) $\sqrt{17}+\sqrt{5}+1>\sqrt{16}+\sqrt{4}+1=4+2+1=7=\sqrt{49}>\sqrt{45}$.

c) $\dfrac{23-2\sqrt{19}}{3}<\dfrac{23-2\sqrt{16}}{3}=\dfrac{23-2.4}{3}=5=\sqrt{25}<\sqrt{27}$.

d) Giả sử

$$\sqrt{3\sqrt{2}}>\sqrt{2\sqrt{3}}\Leftrightarrow\left(\sqrt{3\sqrt{2}}\right)^2>\left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^2\Leftrightarrow 3\sqrt{2}>2\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{18}>\sqrt{12}\Leftrightarrow 18>12.$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng, nên : $\sqrt{3\sqrt{2}}>\sqrt{2\sqrt{3}}$.

18. Các số đó có thể là 1,42 và $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

19. Viết lại phương trình dưới dạng : $\sqrt{3(x+1)^2+4}+\sqrt{5(x+1)^2+16}=6-(x+1)^2$.
Vế trái của phương trình không nhỏ hơn 6, còn vế phải không lớn hơn 6. Vậy đẳng thức chỉ xảy ra khi cả hai vế đều bằng 6, suy ra x = -1.

20. Bất đẳng thức Cauchy $\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}$ viết lại dưới dạng $ab\le\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ (*) (a, b ≥ 0).
Áp dụng bất dẳng thức Cauchy dưới dạng (*) với hai số dương 2x và xy ta được :

$$2x.xy\le\left(\frac{2x+xy}{2}\right)^2=4$$

Dấu “ = “ xảy ra khi : 2x = xy = 4 : 2 tức là khi x = 1, y = 2. ⇒ max A = 2 ⇔ x = 2, y = 2.

21. Bất đẳng thức Cauchy viết lại dưới dạng : $\dfrac{1}{\sqrt{ab}}>\dfrac{2}{a+b}$. Áp dụng ta có S > $2.\dfrac{1998}{1999}$.

22. Chứng minh như bài 1.

23. a) $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-2=\dfrac{x^2+y^2-2xy}{xy}=\dfrac{(x-y)^2}{xy}\ge 0$. Vậy $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\ge 2$

b) Ta có : $A=\left(\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}\right)-\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)=\left(\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}\right)-2\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)+\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)$. Theo câu a :

$$A\ge\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)-2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+2=\left(\frac{x}{y}-1\right)^2+\left(\frac{y}{x}-1\right)^2\ge 0$$

c) Từ câu b suy ra : $\left(\dfrac{x^4}{y^4}+\dfrac{y^4}{x^4}\right)-\left(\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}\right)\ge 0$. Vì $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\ge 2$ (câu a). Do đó :

$$\left(\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{x^4}\right)-\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\ge 2.$$

24. a) Giả sử $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ = m (m : số hữu tỉ) ⇒ $\sqrt{2}$ = m^2-1 ⇒ $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ (vô lí)

b) Giả sử m + $\dfrac{\sqrt{3}}{n}$ = a (a : số hữu tỉ) ⇒ $\dfrac{\sqrt{3}}{n}$ = a – m ⇒ $\sqrt{3}$ = n(a – m) ⇒ $\sqrt{3}$ là số hữu tỉ, vô lí.

25. Có, chẳng hạn $\sqrt{2}+(5-\sqrt{2})=5$

26. Đặt $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=a \Rightarrow \frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+2=a^2$. Dễ dàng chứng minh $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\ge 2$ nên $a^2 \ge 4$, do đó $|a|\ge 2$ (1). Bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với : $a^2 - 2 + 4 \ge 3a$

$$\Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 \ge 0 \Leftrightarrow (a-1)(a-2) \ge 0 \quad (2)$$

Từ (1) suy ra $a \ge 2$ hoặc $a \le -2$. Nếu $a \ge 2$ thì (2) đúng. Nếu $a \le -2$ thì (2) cũng đúng. Bài toán được chứng minh.

27. Bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với :

$$\frac{x^4z^2+y^4x^2+z^4x^2-\left(x^2z+y^2x+z^2y\right)xyz}{x^2y^2z^2}\ge 0.$$

Cần chứng minh tử không âm, tức là : $x^3z^2(x-y)+y^3x^2(y-z)+z^3y^2(z-x) \ge 0$. (1)
Biểu thức không đổi khi hoán vị vòng $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$ nên có thể giả sử x là số lớn nhất. Xét hai trường hợp :

a) $x \ge y \ge z > 0$. Tách $z - x$ ở (1) thành $-(x - y + y - z)$, (1) tương đương với :

$$x^3z^2(x-y)+y^3x^2(y-z)-z^3y^2(x-y)-z^3y^2(y-z)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow z^2(x-y)(x^3-y^2z)+y^2(y-z)(yx^2-z^3)\ge 0$$

Dễ thấy $x-y\ge 0$, $x^3-y^2z\ge 0$, $y-z\ge 0$, $yx^2-z^3\ge 0$ nên bất đẳng thức trên đúng.

b) $x \ge z \ge y > 0$. Tách $x - y$ ở (1) thành $x - z + z - y$, (1) tương đương với :

$$x^3z^2(x-z)+x^3z^2(z-y)-y^3x^2(z-y)-z^3y^2(x-z)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow z^2(x-z)(x^3-zy^2)+x^2(xz^2-y^3)(z-y)\ge 0$$

Dễ thấy bất đẳng thức trên dúng.
Cách khác : Biến đổi bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với :

$$\left(\frac{x}{y}-1\right)^2+\left(\frac{y}{z}-1\right)^2+\left(\frac{z}{x}-1\right)^2+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\ge 3.$$

28. Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử tổng của số hữu tỉ a với số vô tỉ b là số hữu tỉ c. Ta có : $b = c - a$. Ta thấy, hiệu của hai số hữu tỉ c và a là số hữu tỉ, nên b là số hữu tỉ, trái với giả thiết. Vậy c phải là số vô tỉ.

29. a) Ta có : $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2) \Rightarrow (a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$.
b) Xét : $(a+b+c)^2+(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2$. Khai triển và rút gọn ta được : $3(a^2+b^2+c^2)$. Vậy : $(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2)$
c) Tương tự như câu b

30. Giả sử $a + b > 2 \Rightarrow (a+b)^3 > 8 \Leftrightarrow a^3+b^3+3ab(a+b)>8 \Leftrightarrow 2+3ab(a+b)>8$
$\Rightarrow ab(a+b)>2 \Rightarrow ab(a+b)>a^3+b^3$. Chia hai vế cho số dương $a + b$: $ab > a^2 - ab + b^2$
$\Rightarrow (a-b)^2 < 0$, vô lí. Vậy $a + b \le 2$.

31. *Cách 1*: Ta có : $\left[x\right] \le x$; $\left[y\right] \le y$ nên $\left[x\right]+\left[y\right] \le x+y$. Suy ra $\left[x\right]+\left[y\right]$ là số nguyên không vượt quá $x + y$ (1). Theo định nghĩa phần nguyên, $\left[x+y\right]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá $x + y$ (2). Từ (1) và (2) suy ra : $\left[x\right]+\left[y\right] \le \left[x+y\right]$.

Cách 2 : Theo định nghĩa phần nguyên : $0 \le x - \left[x\right] < 1$; $0 \le y - \left[y\right] < 1$.

Suy ra : $0 \le (x+y) - (\left[x\right]+\left[y\right]) < 2$. Xét hai trường hợp :

- Nếu $0 \le (x+y) - (\left[x\right]+\left[y\right]) < 1$ thì $\left[x+y\right] = \left[x\right]+\left[y\right]$ (1)
- Nếu $1 \le (x+y) - (\left[x\right]+\left[y\right]) < 2$ thì $0 \le (x+y) - (\left[x\right]+\left[y\right]+1) < 1$ nên $\left[x+y\right] = \left[x\right]+\left[y\right]+1$ (2). Trong cả hai trường hợp ta đều có : $\left[x\right]+\left[y\right] \le \left[x+y\right]$

32. Ta có $x^2 - 6x + 17 = (x-3)^2 + 8 \ge 8$ nên tử và mẫu của A là các số dương , suy ra A > 0 do đó : A lớn nhất $\Leftrightarrow \frac{1}{A}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ $x^2 - 6x + 17$ nhỏ nhất.

Vậy max A = $\frac{1}{8}$ $\Leftrightarrow$ x = 3.

33. Không được dùng phép hoán vị vòng quanh x → y → z → x và giả sử $x \ge y \ge z$.

<u>*Cách 1*</u> : Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương x, y, z :

$$A = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \ \ge\ 3\sqrt[3]{\frac{x}{y}.\frac{y}{z}.\frac{z}{x}} \ =\ 3$$

Do đó $\min\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right) = 3 \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x} \Leftrightarrow x = y = z$

<u>*Cách 2*</u> : Ta có : $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{x} - \frac{y}{x}\right)$. Ta đã có $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \ge 2$ (do x, y > 0) nên để chứng minh $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \ge 3$ ta chỉ cần chứng minh : $\frac{y}{z} + \frac{z}{x} - \frac{y}{x} \ge 1$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow xy + z^2 - yz \ge xz \text{ (nhân hai vế với số dương xz)}$$

$$\Leftrightarrow xy + z^2 - yz - xz \ge 0 \Leftrightarrow y(x-z) - z(x-z) \ge 0 \Leftrightarrow (x-z)(y-z) \ge 0 \quad (2)$$

(2) đúng với giả thiết rằng z là số nhỏ nhất trong 3 số x, y, z, do đó (1) đúng. Từ đó tìm được giá trị nhỏ nhất của $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$.

34. Ta có x + y = 4 $\Rightarrow$ $x^2 + 2xy + y^2 = 16$. Ta lại có $(x-y)^2 \ge 0 \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 \ge 0$. Từ đó suy ra $2(x^2 + y^2) \ge 16 \Rightarrow x^2 + y^2 \ge 8$. min A = 8 khi và chỉ khi x = y = 2.

35. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số không âm :

$$1 = x + y + z \ge 3.\sqrt[3]{xyz} \quad (1)$$

$$2 = (x + y) + (y + z) + (z + x) \ge 3.\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)} \quad (2)$$

Nhân từng vế của (1) với (2) (do hai vế đều không âm) : $2 \ge 9.\sqrt[3]{A} \Rightarrow A \le \left(\frac{2}{9}\right)^3$

$$\max A = \left(\frac{2}{9}\right)^3 \text{ khi và chỉ khi } x = y = z = \frac{1}{3}.$$

36. a) Có thể. b, c) Không thể.

37. Hiệu của vế trái và vế phải bằng $(a-b)^2(a+b)$.

38. Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{xy} \ge \frac{4}{(x+y)^2}$ với x, y > 0 :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{c}{d+a} = \frac{a^2 + ad + bc + c^2}{(b+c)(a+d)} \ge \frac{4(a^2 + ad + bc + c^2)}{(a+b+c+d)^2} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } \frac{b}{c+d} + \frac{d}{a+b} \ge \frac{4(b^2 + ab + cd + d^2)}{(a+b+c+d)^2} \quad (2)$$

Cộng (1) với (2) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \ge \frac{4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ad + bc + ab + cd)}{(a+b+c+d)^2} = 4B$

Cần chứng minh B ≥ $\frac{1}{2}$, bất đẳng thức này tương đương với :

$$2B \ge 1 \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ad + bc + ab + cd) \ge (a + b + c + d)^2$$
$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ac - 2bd \ge 0 \Leftrightarrow (a - c)^2 + (b - d)^2 \ge 0 : \text{ đúng.}$$

39. - Nếu $0 \le x - [x] < ½$ thì $0 \le 2x - 2[x] < 1$ nên $[2x] = 2[x]$.

- Nếu $½ \le x - [x] < 1$ thì $1 \le 2x - 2[x] < 2 \Rightarrow 0 \le 2x - (2[x] + 1) < 1 \Rightarrow [2x] = 2[x] + 1$

40. Ta sẽ chứng minh tồn tại các số tự nhiên m, p sao cho :

$$96\underbrace{000...00}_{\text{m chữ số 0}} \le a + 15p < 97\underbrace{000...00}_{\text{m chữ số 0}}$$

Tức là $96 \le \frac{a}{10^m} + \frac{15p}{10^m} < 97$ (1). Gọi a + 15 là số có k chữ số : $10^{k-1} \le a + 15 < 10^k$

$\Rightarrow \frac{1}{10} \le \frac{a}{10^k} + \frac{15}{10^k} < 1$ (2). Đặt $x_n = \frac{a}{10^k} + \frac{15p}{10^k}$. Theo (2) ta có $x_1 < 1$ và $\frac{15}{10^k} < 1$.

Cho n nhận lần lượt các giá trị 2, 3, 4, …, các giá trị của x_n tăng dần, mỗi lần tăng không quá 1 đơn vị, khi đó $[x_n]$ sẽ trải qua các giá trị 1, 2, 3, … Đến một lúc nào đó ta có $[x_p] = 96$. Khi đó $96 \le x_p < 97$ tức là $96 \le \frac{a}{10^k} + \frac{15p}{10^k} < 97$. Bất đẳng thức (1) được chứng minh.

42. a) Do hai vế của bất đẳng thức không âm nên ta có :

$$|A + B| \le |A| + |B| \Leftrightarrow |A + B|^2 \le (|A| + |B|)^2$$
$$\Leftrightarrow A^2 + B^2 + 2AB \le A^2 + B^2 + 2|AB| \Leftrightarrow AB \le |AB| \text{ (bất đẳng thức đúng)}$$

Dấu " = " xảy ra khi $AB \ge 0$.

b) Ta có : $M = |x + 2| + |x - 3| = |x + 2| + |3 - x| \ge |x + 2 + 3 - x| = 5$.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $(x + 2)(3 - x) \ge 0 \Leftrightarrow -2 \le x \le 3$ (lập bảng xét dấu)

Vậy min M = 5 $\Leftrightarrow -2 \le x \le 3$.

c) Phương trình đã cho $\Leftrightarrow |2x + 5| + |x - 4| = |x + 9| = |2x + 5 + 4 - x|$

$\Leftrightarrow (2x + 5)(4 - x) \ge 0 \Leftrightarrow -5/2 \le x \le 4$

43. Điều kiện tồn tại của phương trình : $x^2 - 4x - 5 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -1 \\ x \ge 5 \end{array}\right.$

Đặt ẩn phụ $\sqrt{x^2 - 4x - 5} = y \ge 0$, ta được : $2y^2 - 3y - 2 = 0 \Leftrightarrow (y - 2)(2y + 1) = 0$.

45. Vô nghiệm

46. Điều kiện tồn tại của $\sqrt{x}$ là $x \ge 0$. Do đó : $A = \sqrt{x} + x \ge 0 \Rightarrow$ min A = 0 $\Leftrightarrow x = 0$.

47. Điều kiện : $x \le 3$. Đặt $\sqrt{3 - x} = y \ge 0$, ta có : $y^2 = 3 - x \Rightarrow x = 3 - y^2$.

$$B = 3 - y^2 + y = -(y - ½)^2 + \frac{13}{4} \le \frac{13}{4}. \text{ max } B = \frac{13}{4} \Leftrightarrow y = ½ \Leftrightarrow x = \frac{11}{4}.$$

48. a) Xét a^2 và b^2. Từ đó suy ra a = b.

b) $\sqrt{5 - \sqrt{13 + 4\sqrt{3}}} = \sqrt{5 - (2\sqrt{3} + 1)} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1$. Vậy hai số này bằng nhau.

c) Ta có : $\left(\sqrt{n + 2} - \sqrt{n + 1}\right)\left(\sqrt{n + 2} + \sqrt{n + 1}\right) = 1$ và $\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n + 1} + \sqrt{n}\right) = 1$.

Mà $\sqrt{n + 2} + \sqrt{n + 1} > \sqrt{n + 1} + \sqrt{n}$ nên $\sqrt{n+2} - \sqrt{n + 1} < \sqrt{n + 1} - \sqrt{n}$.

49. $A = 1 - |1 - 3x| + |3x - 1|^2 = (|3x - 1| - ½)^2 + ¾ \ge ¾$.

Từ đó suy ra : min A = ¾ $\Leftrightarrow$ x = ½ hoặc x = 1/6

51. M = 4

52. x = 1 ; y = 2 ; z = -3.

53. $P = |5x-2| + |3-5x| \ge |5x-2+3-5x| = 1$. min P = 1 $\Leftrightarrow \dfrac{2}{5} \le x \le \dfrac{3}{5}$.

54. Cần nhớ cách giải một số phương trình dạng sau :

a) $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \ge 0 \quad (B \ge 0) \\ A = B \end{cases}$ b) $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \ge 0 \\ A = B^2 \end{cases}$ c) $\sqrt{A} + \sqrt{B} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

d) $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = -B \end{array}\right. \end{cases}$ e) $|A| + |B| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$.

a) Đưa phương trình về dạng : $\sqrt{A} = \sqrt{B}$.
b) Đưa phương trình về dạng : $\sqrt{A} = B$.
c) Phương trình có dạng : $\sqrt{A} + \sqrt{B} = 0$.
d) Đưa phương trình về dạng : $\sqrt{A} = B$.
e) Đưa phương trình về dạng : $|A| + |B| = 0$
g, h, i) Phương trình vô nghiệm.
k) Đặt $\sqrt{x-1} = y \ge 0$, đưa phương trình về dạng : $|y-2| + |y-3| = 1$. Xét dấu vế trái.
l) Đặt : $\sqrt{8x+1} = u \ge 0$; $\sqrt{3x-5} = v \ge 0$; $\sqrt{7x+4} = z \ge 0$; $\sqrt{2x-2} = t \ge 0$.

Ta được hệ : $\begin{cases} u + v = z + t \\ u^2 - v^2 = z^2 - t^2 \end{cases}$. Từ đó suy ra : u = z tức là : $\sqrt{8x+1} = \sqrt{7x+4} \Leftrightarrow x = 3$.

55. _Cách 1_ : Xét

$$x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}(x-y) = x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}(x-y) + 2 - 2xy = (x - y - \sqrt{2})^2 \ge 0.$$

Cách 2 : Biến đổi tương đương $\dfrac{x^2+y^2}{x-y} \ge 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{\left(x^2+y^2\right)^2}{(x-y)^2} \ge 8 \Leftrightarrow (x^2+y^2)^2 - 8(x-y)^2 \ge 0$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2)^2 - 8(x^2+y^2-2) \ge 0 \Leftrightarrow (x^2+y^2)^2 - 8(x^2+y^2) + 16 \ge 0 \Leftrightarrow (x^2+y^2-4)^2 \ge 0.$$

Cách 3 : Sử dụng bất đẳng thức Cauchy :

$$\frac{x^2+y^2}{x-y} = \frac{x^2+y^2-2xy+2xy}{x-y} = \frac{(x-y)^2+2.1}{x-y} = (x-y) + \frac{2}{x-y} \ge 2\sqrt{(x-y).\frac{1}{x-y}} \quad (x > y).$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$; $y = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ hoặc $x = \dfrac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$; $y = \dfrac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

62. $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)^2 = \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}+2\left(\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}\right) = \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}+\dfrac{2(c+b+a}{abc} =$

$= \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$. Suy ra điều phải chứng minh.

63. Điều kiện : $\begin{cases} x^2 - 16x + 60 \ge 0 \\ x - 6 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)(x-10) \ge 0 \\ x \ge 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le 6 \\ x \ge 10 \end{array}\right. \\ x \ge 6 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 10$.

Bình phương hai vế : $x^2 - 16x + 60 < x^2 - 12x + 36 \Leftrightarrow x > 6$.
Nghiệm của bất phương trình đã cho : $x \geq 10$.
64. Điều kiện $x^2 \geq 3$. Chuyển vế : $\sqrt{x^2 - 3} \leq x^2 - 3$ (1)

Đặt thừa chung : $\sqrt{x^2 - 3}.(1 - \sqrt{x^2 - 3}) \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 3 = 0 \\ 1 - \sqrt{x^2 - 3} \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{3} \\ x \geq 2 \\ x \leq -2 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của bất phương trình : $x = \pm\sqrt{3}$; $x \geq 2$; $x \leq -2$.
65. Ta có $x^2(x^2 + 2y^2 - 3) + (y^2 - 2)^2 = 1 \Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 - 4(x^2 + y^2) + 3 = -x^2 \leq 0$.
Do đó : $A^2 - 4A + 3 \leq 0 \Leftrightarrow (A - 1)(A - 3) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq A \leq 3$.
min A = 1 $\Leftrightarrow$ x = 0, khi đó y = ± 1. max A = 3 $\Leftrightarrow$ x = 0, khi đó $y = \pm\sqrt{3}$.
66. a) $\frac{1}{2} \leq x \neq 1$.
b) B có nghĩa $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 16 - x^2 \geq 0 \\ 2x + 1 > 0 \\ x^2 - 8x + 8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \\ (x-4)^2 \geq 8 \\ x > -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \\ \left[\begin{array}{l} x \leq 4 - 2\sqrt{2} \\ x \geq 4 + 2\sqrt{2} \end{array}\right. \\ x > -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x \leq 4 - 2\sqrt{2}.$$

67. a) A có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ x \neq \pm\sqrt{x^2 - 2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) \geq 0 \\ x^2 \neq x^2 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ x < 0 \end{array}\right.$

b) $A = 2\sqrt{x^2 - 2x}$ với điều kiện trên.
c) $A < 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x} < 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x < 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 < 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x - 1 < \sqrt{2} \Rightarrow$ kq
68. Đặt $0,\underbrace{999...99}_{20\text{ chữ số }9} = a$. Ta sẽ chứng minh 20 chữ số thập phân đầu tiên của $\sqrt{a}$ là các chữ số 9. Muốn vậy chỉ cần chứng minh $a < \sqrt{a} < 1$. Thật vậy ta có : $0 < a < 1 \Rightarrow a(a - 1) < 0 \Rightarrow a^2 - a < 0 \Rightarrow a^2 < a$. Từ $a^2 < a < 1$ suy ra $a < \sqrt{a} < 1$.

$$\text{Vậy } \sqrt{0,\underbrace{999...99}_{20\text{ chữ số }9}} = 0,\underbrace{999...99}_{20\text{ chữ số }9}.$$

69. a) Tìm giá trị lớn nhất. Áp dụng $|a + b| \geq |a| + |b|$.
$A \leq |x| + \sqrt{2} + |y| + 1 = 6 + \sqrt{2} \Rightarrow \max A = 6 + \sqrt{2}$ (khi chẳng hạn x = - 2, y = - 3)
b) Tìm giá trị nhỏ nhất. Áp dụng $|a - b| \geq |a| - |b$.
$A \geq |x| - \sqrt{2}\ |y| - 1 = 4 - \sqrt{2} \Rightarrow \min A = 4 - \sqrt{2}$ (khi chẳng hạn x = 2, y = 3)
70. Ta có : $x^4 + y^4 \geq 2x^2y^2$; $y^4 + z^4 \geq 2y^2z^2$; $z^4 + x^4 \geq 2z^2x^2$. Suy ra :

$$x^4 + y^4 + z^4 \geq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \quad (1)$$

Mặt khác, dễ dàng chứng minh được : Nếu a + b + c = 1 thì $a^2 + b^2 + c^2 \geq \dfrac{1}{3}$.

Do đó từ giả thiết suy ra : $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq \dfrac{1}{3}$ (2).

Từ (1) , (2) : $\min A = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x = y = z = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

71. Làm như bài 8c (§ 2). Thay vì so sánh $\sqrt{n} + \sqrt{n+2}$ và $2\sqrt{n+1}$ ta so sánh $\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$ và $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Ta có :
$\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} + \sqrt{n+2} < 2\sqrt{n+1}$.

72. <u>*Cách 1*</u> : Viết các biểu thức dưới dấu căn thành bình phương của một tổng hoặc một hiệu.
<u>*Cách 2*</u> : Tính A^2 rồi suy ra A.

73. Áp dụng : $(a + b)(a – b) = a^2 – b^2$.

74. Ta chứng minh bằng phản chứng.

a) Giả sử tồn tại số hữu tỉ **r** mà $\sqrt{3} + \sqrt{5} = r \Rightarrow 3 + 2\sqrt{15} + 5 = r^2 \Rightarrow \sqrt{15} = \dfrac{r^2 - 8}{2}$. Vế trái là số vô tỉ, vế phải là số hữu tỉ, vô lí. Vậy $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ là số vô tỉ.

b), c) Giải tương tự.

75. a) Giả sử a > b rồi biến đổi tương đương : $3\sqrt{3} = 3 > 2\sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow 3\sqrt{3} > 2\sqrt{2} + 2$
$\Leftrightarrow \left(3\sqrt{3}\right)^2 > \left(2\sqrt{2} + 2\right)^2 \Leftrightarrow 27 > 8 + 4 + 8\sqrt{2} \Leftrightarrow 15 > 8\sqrt{2} \Leftrightarrow 225 > 128$. Vậy a > b là đúng.

b) Bình phương hai vế lên rồi so sánh.

76. <u>*Cách 1*</u> : Đặt A = $\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}}$, rõ ràng A > 0 và $A^2 = 2 \Rightarrow A = \sqrt{2}$
<u>*Cách 2*</u> : Đặt B = $\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}.B = \sqrt{8+2\sqrt{7}} - \sqrt{8-2\sqrt{7}} - 2 = 0 \Rightarrow B = 0$.

77. $Q = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2.3} + \sqrt{2.4} + 2\sqrt{4}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}} = \dfrac{\left(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}\right) + \sqrt{2}\left(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}\right)}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}} = 1 + \sqrt{2}$.

78. Viết $\sqrt{40} = 2\sqrt{2.5}$; $\sqrt{56} = 2\sqrt{2.7}$; $\sqrt{140} = 2\sqrt{5.7}$. Vậy $P = \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$.

79. Từ giả thiết ta có : $x\sqrt{1-y^2} = 1 - y\sqrt{1-x^2}$. Bình phương hai vế của đẳng thức này ta được : $y = \sqrt{1-x^2}$. Từ đó : $x^2 + y^2 = 1$.

80. Xét A^2 để suy ra : $2 \le A^2 \le 4$. Vậy : $\min A = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \pm 1$; $\max A = 2 \Leftrightarrow x = 0$.

81. Ta có : $M = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 \le \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 + \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = 2a + 2b \le 2$.

$$\max M = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a} = \sqrt{b} \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}.$$

82. Xét tổng của hai số :
$\left(2a + b - 2\sqrt{cd}\right) + \left(2c + d - 2\sqrt{ab}\right) = \left(a + b - 2\sqrt{ab}\right) + \left(c + d - 2\sqrt{cd}\right) + a + c =$
$= \left(a + c\right) + \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 + \left(\sqrt{c} - \sqrt{d}\right)^2 \ge a + c > 0$.

83. $N = \sqrt{4\sqrt{6} + 8\sqrt{3} + 4\sqrt{2} + 18} = \sqrt{12 + 8\sqrt{3} + 4 + 4\sqrt{6} + 4\sqrt{2} + 2} =$
$= \sqrt{\left(2\sqrt{3} + 2\right)^2 + 2\sqrt{2}\left(2\sqrt{3} + 2\right) + 2} = \sqrt{\left(2\sqrt{3} + 2 + \sqrt{2}\right)^2} = 2\sqrt{3} + \sqrt{2} + 2$.

84. Từ $x + y + z = \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} \Rightarrow \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 + \left(\sqrt{y} - \sqrt{z}\right)^2 + \left(\sqrt{z} - \sqrt{x}\right)^2 = 0$.

Vậy x = y = z.

85. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 1 và a_i (i = 1, 2, 3, … n).

86. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy với hai số a + b ≥ 0 và $2\sqrt{ab} \ge 0$, ta có :

$$a+b+2\sqrt{ab} \ge 2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}} \text{ hay } \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 \ge 2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}.$$

Dấu " = " xảy ra khi a = b.

87. Giả sử $a \ge b \ge c > 0$. Ta có $b + c > a$ nên $b + c + 2\sqrt{bc} > a$ hay $\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2 > \left(\sqrt{a}\right)^2$

Do đó : $\sqrt{b}+\sqrt{c} > \sqrt{a}$. Vậy ba đoạn thẳng $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ lập được thành một tam giác.

88. a) Điều kiện : $ab \ge 0$; $b \ne 0$. Xét hai trường hợp :

* Trường hợp 1 : $a \ge 0$; $b > 0$: $A = \dfrac{\sqrt{b}.(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{b}.\sqrt{b}} - \sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{b}} - \sqrt{\dfrac{a}{b}} = -1.$

* Trường hợp 2 : $a \le 0$; $b < 0$: $A = \dfrac{\sqrt{ab}-\sqrt{b^2}}{-\sqrt{b^2}} - \sqrt{\dfrac{a}{b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}} + 1 - \sqrt{\dfrac{a}{b}} = 1 - 2\sqrt{\dfrac{a}{b}}.$

b) Điều kiện : $\begin{cases} (x+2)^2 - 8x \ge 0 \\ x > 0 \\ \sqrt{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}} \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \ne 2 \end{cases}$. Với các điều kiện đó thì :

$$B = \frac{\sqrt{(x+2)^2-8x}}{\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{(x-2)^2}.\sqrt{x}}{x-2} = \frac{|x-2|.\sqrt{x}}{x-2}.$$

- Nếu $0 < x < 2$ thì $| x – 2 | = -(x – 2)$ và $B = -\sqrt{x}$.
- Nếu $x > 2$ thì $| x – 2 | = x – 2$ và $B = \sqrt{x}$

89. Ta có : $\dfrac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} = \dfrac{\left(\sqrt{a^2+1}\right)^2+1}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{a^2+1} + \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy:

$\sqrt{a^2+1} + \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}} \ge 2\sqrt{\sqrt{a^2+1}.\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}} = 2$. Vậy $\dfrac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \ge 2$. Đẳng thức xảy ra khi :

$$\sqrt{a^2+1} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \Leftrightarrow a = 0.$$

93. Nhân 2 vế của pt với $\sqrt{2}$, ta được : $\left|\sqrt{2x-5}+3\right| + \left|\sqrt{2x-5}-1\right| = 4 \Leftrightarrow 5/2 \le x \le 3$.

94. Ta chứng minh bằng qui nạp toán học :

a) Với n = 1 ta có : $P_1 = \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (*) đúng.

b) Giả sử : $P_k < \dfrac{1}{\sqrt{2k+1}} \Leftrightarrow \dfrac{1.3.5...(2k-1)}{2.4.6...2k} < \dfrac{1}{\sqrt{2k+1}}$ (1)

c) Ta chứng minh rằng (*) đúng khi n = k + 1 , tức là :

$$P_{k+1} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}} \Leftrightarrow \frac{1.3.5...(2k+1)}{2.4.6...(2k+2)} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}} \qquad (2)$$

Với mọi số nguyên dương k ta có : $\frac{2k+1}{2k+2} < \frac{\sqrt{2k+1}}{\sqrt{2k+3}}$ (3)

Nhân theo từng vế các bất đẳng thức (1) và (3) ta được bất đẳng thức (2). Vậy $\forall$ n $\in \mathbf{Z}_+$ ta có

$$P_n = \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

95. Biến đổi tương đương : $\sqrt{a} + \sqrt{b} \le \sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}} \Leftrightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} \le \frac{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3}}{\sqrt{ab}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} \le \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow \sqrt{ab} \le a - \sqrt{ab} + b \Leftrightarrow \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \ge 0$ (đúng).

96. Điều kiện : $\begin{cases} x - \sqrt{4(x-1)} \ge 0 \\ x + \sqrt{4(x-1)} \ge 0 \\ x^2 - 4(x-1) > 0 \\ x - 1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < x < 2 \\ x > 2 \end{array}\right.$

Xét trên hai khoảng $1 < x < 2$ và $x > 2$. Kết quả : $A = \frac{2}{1-x}$ và $A = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$

105. *Cách 1* : Tính $A\sqrt{2}$. *Cách 2* : Tính A^2

Cách 3 : Đặt $\sqrt{2x-1} = y \ge 0$, ta có : $2x - 1 = y^2$.

$$A = \frac{\sqrt{2x + 2\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2x - 2\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{y^2+1+2y}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{y^2+1-2y}}{\sqrt{2}} = \frac{y+1}{\sqrt{2}} - \frac{|y-1|}{\sqrt{2}}$$

Với $y \ge 1$ (tức là $x \ge 1$), $A = \frac{1}{\sqrt{2}}(y+1-y+1) = \sqrt{2}$.

Với $0 \le y < 1$ (tức là $\frac{1}{2} \le x < 1$), $A = \frac{1}{\sqrt{2}}(y+1+y-1) = \frac{2y}{\sqrt{2}} = y\sqrt{2} = \sqrt{4x-2}$.

108. Nếu $2 \le x \le 4$ thì $A = 2\sqrt{2}$. Nếu $x \ge 4$ thì $A = 2\sqrt{x-2}$.

109. Biến đổi : $\sqrt{x+y-2} + \sqrt{2} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$. Bình phương hai vế rồi rút gọn, ta được :

$\sqrt{2(x+y-2)} = \sqrt{xy}$. Lại bình phương hai vế rồi rút gọn : $(2 - y)(x - 2) = 0$.

Đáp : $x = 2$, $y \ge 0$, $x \ge 0$, $y = 2$.

110. Biến đổi tương đương :

(1) $\Leftrightarrow$ $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)} \ge a^2 + c^2 + 2ac + b^2 + d^2 + 2bd$

$\Leftrightarrow \sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)} \ge ac + bd$ (2)

* Nếu $ac + bd < 0$, (2) được chứng minh.

* Nếu $ac + bd \ge 0$, (2) tương đương với :

$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \ge a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd \Leftrightarrow a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \ge a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd$

$\Leftrightarrow (ad - bc)^2 \ge 0$ (3). Bất đẳng thức (3) đúng, vậy bất đẳng thức (1) được chứng minh.

111. *Cách 1* : Theo bất đẳng thức Cauchy :

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}\ge 2\sqrt{\frac{a^2}{b+c}.\frac{b+c}{4}}=2.\frac{a}{2}=a\ \Rightarrow\ \frac{a^2}{b+c}\ge a-\frac{b+c}{4}.$$

Tương tự : $\frac{b^2}{a+c}\ge b-\frac{a+c}{4}$; $\frac{c^2}{a+b}\ge c-\frac{a+b}{4}$.

Cộng từng vế 3 bất đẳng thức : $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge (a+b+c)-\frac{a+b+c}{2}=\frac{a+b+c}{2}$

Cách 2 : Theo BĐT Bunhiacôpxki : $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \ge (ax + by + cz)^2$. Ta có :

$$\left[\left(\frac{a}{\sqrt{b+c}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{c+a}}\right)^2+\left(\frac{c}{\sqrt{a+b}}\right)^2\right]X\left[\left(\sqrt{b+c}\right)^2+\left(\sqrt{c+a}\right)^2+\left(\sqrt{a+b}\right)^2\right]\ge$$

$$\ge\left(\frac{a}{\sqrt{b+c}}.\sqrt{b+c}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}.\sqrt{c+a}+\frac{c}{\sqrt{a+b}}.\sqrt{a+b}\right)^2$$

$$\Rightarrow\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right).\left[2(a+b+c)\right]\ge(a+b+c)^2\Rightarrow\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{a+b+c}{2}.$$

112. a) Ta nhìn tổng a + 1 dưới dạng một tích 1.(a + 1) và áp dụng bđt Cauchy : $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$

$$\sqrt{a+1}=\sqrt{1.(a+1)}\le\frac{(a+1)+1}{2}=\frac{a}{2}+1$$

Tương tự : $\sqrt{b+1}=\frac{b}{2}+1$; $\sqrt{c+1}=\frac{c}{2}+1$

Cộng từng vế 3 bất đẳng thức : $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1}\le\frac{a+b+c}{2}+3=3,5$.

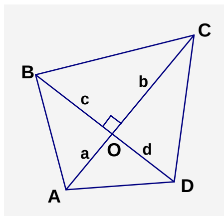
Dấu “ = ” xảy ra ⇔ a + 1 = b + 1 = c + 1 ⇔ a = b = c = 0, trái với giả thiết a + b + c = 1.

Vậy : $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1}<3,5$.

b) Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki với hai bộ ba số :

$$\left(1.\sqrt{a+b}+1.\sqrt{b+c}+1.\sqrt{c+a}\right)^2\le(1+1+1)X\left[\left(\sqrt{a+b}\right)^2+\left(\sqrt{b+c}\right)^2+\left(\sqrt{c+a}\right)^2\right]\Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\right)^2\le 3(a+b+b+c+c+a)=6\Rightarrow\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\le\sqrt{6}$$



113. Xét tứ giác ABCD có AC ⊥ BD, O là giao điểm hai đường chéo.
OA = a ; OC = b ; OB = c ; OD = d với a, b, c, d > 0. Ta có :

$AB=\sqrt{a^2+c^2}$; $BC=\sqrt{b^2+c^2}$; $AD=\sqrt{a^2+d^2}$; $CD=\sqrt{b^2+d^2}$

AC = a + b ; BD = c + d. Cần chứng minh : AB.BC + AD.CD ≥ AC.BD.
Thật vậy ta có : AB.BC ≥ $2S_{ABC}$; AD.CD ≥ $2S_{ADC}$. Suy ra :
Suy ra : AB.BC + AD.CD ≥ $2S_{ABCD}$ = AC.BD.

Vậy : $\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}+\sqrt{(a^2+d^2)(b^2+d^2)}\ge(a+b)(c+d)$.

Chú ý : Giải bằng cách áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki :
$(m^2 + n^2)(x^2 + y^2) \ge (mx + ny)^2$ với m = a , n = c , x = c , y = b ta có :

$$(a^2 + c^2)(c^2 + b^2) \ge (ac + cb)^2 \Rightarrow \sqrt{\left(a^2 + c^2\right)\left(c^2 + b^2\right)} \ge ac + cb \quad (1)$$

Tương tự : $\sqrt{\left(a^2 + d^2\right)\left(d^2 + b^2\right)} \ge ad + bd$ (2) . Cộng (1) và (2) suy ra đpcm.

114. *<u>Lời giải sai</u>* : $A = x + \sqrt{x} = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \ge -\frac{1}{4}$. Vậy $\min A = -\frac{1}{4}$.

<u>Phân tích sai lầm</u> : Sau khi chứng minh f(x) ≥ - $\frac{1}{4}$, chưa chỉ ra trường hợp xảy ra f(x) = - $\frac{1}{4}$

Xảy ra dấu đẳng thức khi và chỉ khi $\sqrt{x} = -\frac{1}{2}$. Vô lí.

<u>Lời giải đúng</u> : Để tồn tại $\sqrt{x}$ phải có $x \ge 0$. Do đó A = x + $\sqrt{x} \ge 0$. min A = 0 ⇔ x = 0.

115. Ta có $A = \frac{(x+a)(x+b)}{x} = \frac{x^2 + ax + bx + ab}{x} = \left(x + \frac{ab}{x}\right) + (a+b)$.

Theo bất đẳng thức Cauchy : $x + \frac{ab}{x} \ge 2\sqrt{ab}$ nên $A \ge 2\sqrt{ab} + a + b = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$.

$$\min A = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 \text{ khi và chi khi } \begin{cases} x = \frac{ab}{x} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{ab}.$$

116. Ta xét biểu thức phụ : $A^2 = (2x + 3y)^2$. Nhớ lại bất đẳng thức Bunhiacôpxki :

$$(am + bn)^2 \le (a^2 + b^2)(m^2 + n^2) \quad (1)$$

Nếu áp dụng (1) với a = 2, b = 3, m = x, n = y ta có :

$$A^2 = (2x + 3y)^2 \le (2^2 + 3^2)(x^2 + y^2) = 13(x^2 + y^2).$$

Vói cách trên ta không chỉ ra được hằng số α mà $A^2 \le \alpha$. Bây giờ, ta viết A^2 dưới dạng :

$A^2 = \left(\sqrt{2}.\sqrt{2}x + \sqrt{3}.\sqrt{3}y\right)^2$ rồi áp dụng (1) ta có :

$$A^2 = \left[\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2\right]\left[\left(x\sqrt{2}\right)^2 + \left(y\sqrt{3}\right)^2\right] = (2+3)(2x^2 + 3y^2) \le 5.5 = 25$$

Do $A^2 \le 25$ nên $-5 \le A \le 5$. min A = -5 ⇔ $\begin{cases} x = y \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -1$

$$\max A = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$$

117. Điều kiện $x \le 2$. Đặt $\sqrt{2 - x} = y \ge 0$, ta có : $y^2 = 2 - x$.

$$a = 2 - y^2 + y = -\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \le \frac{9}{4} \Rightarrow \max A = \frac{9}{4} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{7}{4}$$

118. Điều kiện $x \ge 1$; $x \ge 1/5$; $x \ge 2/3$ ⇔ $x \ge 1$.

Chuyển vế, rồi bình phương hai vế : $x - 1 = 5x - 1 + 3x - 2 + 2\sqrt{15x^2 - 13x + 2}$ (3)

Rút gọn : $2 - 7x = 2\sqrt{15x^2 - 13x + 2}$. Cần có thêm điều kiện $x \le 2/7$.

Bình phương hai vế : $4 - 28x + 49x^2 = 4(15x^2 - 13x + 2)$ ⇔ $11x^2 - 24x + 4 = 0$

$$(11x - 2)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2/11 ; x_2 = 2.$$

Cả hai nghiệm đều không thỏa mãn điều kiện. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

119. Điều kiện $x \ge 1$. Phương trình biến đổi thành :

$$\sqrt{x-1}+1+\left|\sqrt{x-1}-1\right|=2 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x-1}+\left|\sqrt{x-1}-1\right|=1$$

* Nếu x > 2 thì : $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}-1=1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=1\ x=2$, không thuộc khoảng đang xét.

* Nếu $1 \le x \le 2$ thì : $\sqrt{x-1}+1-\sqrt{x-1}+1=2$. Vô số nghiệm $1 \le x \le 2$

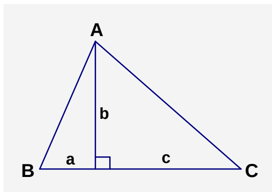
Kết luận : $1 \le x \le 2$.

120. Điều kiện : $x^2 + 7x + 7 \ge 0$. Đặt $\sqrt{x^2+7x+7} = y \ge 0 \Rightarrow x^2 + 7x + 7 = y^2$.
Phương trình đã cho trở thành : $3y^2 - 3 + 2y = 2 \Leftrightarrow 3y^2 + 2y - 5 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(3y+5) = 0$
$\Leftrightarrow$ y = - 5/3 (loại) ; y = 1. Với y = 1 ta có $\sqrt{x^2+7x+7} = 1 \Rightarrow x^2 + 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ (x + 1)(x + 6) = 0. Các giá trị x = - 1, x = - 6 thỏa mãn $x^2 + 7x + 7 \ge 0$ là nghiệm của (1).

121. Vế trái : $\sqrt{3(x+1)^2+4}+\sqrt{5(x+1)^2+9} \ge \sqrt{4}+\sqrt{9}=5$.
Vế phải : $4 - 2x - x^2 = 5 - (x+1)^2 \le 5$. Vậy hai vế đều bằng 5, khi đó x = - 1. Với giá trị này cả hai bất đẳng thức này đều trở thành đẳng thức. Kết luận : x = - 1

122. a) Giả sử $\sqrt{3}-\sqrt{2} = a$ (a : hữu tỉ) $\Rightarrow 5 - 2\sqrt{6} = a^2 \Rightarrow \sqrt{6}=\dfrac{5-a^2}{2}$. Vế phải là số hữu tỉ, vế trái là số vô tỉ. Vô lí. Vậy $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ là số vô tỉ.
b) Giải tương tự câu a.

123. Đặt $\sqrt{x-2} = a$, $\sqrt{4-x} = b$, ta có $a^2 + b = 2$. Sẽ chứng minh $a + b \le 2$. Cộng từng vế bất đẳng thức : $a \le \dfrac{a^2+1}{2}$; $b \le \dfrac{b^2+1}{2}$.



124. Đặt các đoạn thẳng BH = a, HC = c trên một đường thẳng.
Kẻ HA $\perp$ BC với AH = b. Dễ thấy $AB.AC \ge 2S_{ABC} = BC.AH$.

125. Bình phương hai vế rồi rút gọn, ta được bất đẳng thức tương đương : $(ad - bc)^2 \ge 0$. *Chú ý* : Cũng có thể chứng minh bằng bất đẳng thức Bunhiacôpxki.

126. Giả sử $a \ge b \ge c > 0$. Theo đề bài : b + c > a. Suy ra : $b + c + 2\sqrt{bc} > a \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2 > \left(\sqrt{a}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{b}+\sqrt{c} > \sqrt{a}$$

Vậy ba đoạn thẳng có độ dài $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, $\sqrt{a}$ lập được thành một tam giác.

127. Ta có $a, b \ge 0$. Theo bất đẳng thức Cauchy :

$$\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{a+b}{4}=\frac{a+b}{2}\left(a+b+\frac{1}{2}\right) \ge \sqrt{ab}\left(a+b+\frac{1}{2}\right)$$

Cần chứng minh : $\sqrt{ab}\left(a+b+\dfrac{1}{2}\right) \ge a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$. Xét hiệu hai vế :

$$\sqrt{ab}\left(a+b+\frac{1}{2}\right) - \sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right) = \sqrt{ab}\left(a+b+\frac{1}{2}-\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) =$$

$$=\sqrt{ab}\left[\left(\sqrt{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\frac{1}{2}\right)^2\right] \ge 0$$

Xảy ra dấu đẳng thức : $a = b = \dfrac{1}{4}$ hoặc a = b = 0.

128. Theo bất đẳng thức Cauchy : $\sqrt{\dfrac{b+c}{a}.1} \le \left(\dfrac{b+c}{a}+1\right):2=\dfrac{b+c+a}{2a}$.

Do đó : $\sqrt{\dfrac{a}{b+c}} \ge \dfrac{2a}{a+b+c}$. Tương tự : $\sqrt{\dfrac{b}{a+c}} \ge \dfrac{2b}{a+b+c}$; $\sqrt{\dfrac{c}{a+b}} \ge \dfrac{2c}{a+b+c}$

Cộng từng vế : $\sqrt{\dfrac{a}{b+c}} + \sqrt{\dfrac{b}{c+a}} + \sqrt{\dfrac{c}{a+b}} \ge \dfrac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2$.

Xảy ra dấu đẳng thức : $\begin{cases} a = b+c \\ b = c+a \\ c = a+b \end{cases} \Rightarrow a+b+c = 0$, trái với giả thiết a, b, c > 0.

Vậy dấu đẳng thức không xảy ra.

129. *Cách 1* : Dùng bất đẳng thức Bunhiacôpxki. Ta có :

$$\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)^2 \le \left(x^2 - y^2\right)\left(1-y^2+1-x^2\right).$$

Đặt $x^2 + y^2 = m$, ta được : $1^2 \le m(2 - m) \Rightarrow (m-1)^2 \le 0 \Rightarrow m = 1$ (đpcm).

Cách 2 : Từ giả thiết : $x\sqrt{1-y^2} = 1 - y\sqrt{1-x^2}$. Bình phương hai vế :

$$x^2(1-y^2) = 1 - 2y\sqrt{1-x^2} + y^2(1-x^2) \Rightarrow x^2 = 1 - 2y\sqrt{1-x^2} + y^2$$

$$0 = (y - \sqrt{1-x^2})^2 \Rightarrow y = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

130. Áp dụng $|A| + |B| \ge |A+B|$. min A = 2 $\Leftrightarrow 1 \le x \le 2$.

131. Xét $A^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2}$. Do $0 \le \sqrt{1-x^2} \le 1 \Rightarrow 2 \le 2 + 2\sqrt{1-x^2} \le 4$

$$\Rightarrow 2 \le A^2 \le 4. \text{ min } A = \sqrt{2} \text{ với } x = \pm 1, \text{ max } A = 2 \text{ với } x = 0.$$

132. Áp dụng bất đẳng thức : $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \ge \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$ (bài 23)

$$A = \sqrt{x^2+1^2} + \sqrt{(1-x)^2+2^2} \ge \sqrt{(x+1-x)^2+(1+2)^2} = \sqrt{10}$$

$$\min A = \sqrt{10} \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

133. Tập xác định : $\begin{cases} -x^2+4x+12 \ge 0 \\ -x^2+2x+3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(6-x) \ge 0 \\ (x+1)(3-x) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le x \le 3$ (1)

Xét hiệu : $(-x^2 + 4x + 12)(-x^2 + 2x + 3) = 2x + 9$. Do (1) nên $2x + 9 > 0$ nên $A > 0$.

Xét : $A^2 = \left(\sqrt{(x+2)(6-x)} - \sqrt{(x+1)(3-x)}\right)^2$. Hiển nhiên $A^2 \ge 0$ nhưng dấu " = " không xảy ra (vì A > 0). Ta biến đổi A^2 dưới dạng khác :

$$A^2 = (x+2)(6-x) + (x+1)(3-x) - 2\sqrt{(x+2)(6-x)(x+1)(3-x)} =$$

$$= (x+1)(6-x) + (6-x) + (x+2)(3-x) - (3-x) - 2\sqrt{(x+2)(6-x)(x+1)(3-x)}$$

$$= (x+1)(6-x) + (x+2)(3-x) - 2\sqrt{(x+2)(6-x)(x+1)(3-x)} + 3$$

$$= \left(\sqrt{(x+1)(6-x)} - \sqrt{(x+2)(3-x)}\right)^2 + 3.$$

$$A^2 \ge 3. \text{ Do } A > 0 \text{ nên min } A = \sqrt{3} \text{ với } x = 0.$$

134. a) Điều kiện : $x^2 \le 5$.

* <u>Tìm giá trị lớn nhất</u> : Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki :

$$A^2 = (2x + 1.\sqrt{5-x^2})^2 \le (2^2 + 1^1)(x^2 + 5 - x^2) = 25 \Rightarrow A^2 \le 25.$$

$$A^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2} = \sqrt{5-x^2} \\ x^2 \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 = 4(5-x^2) \\ x^2 \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Với x = 2 thì A = 5. Vậy max A = 5 với x = 2.

* <u>Tìm giá trị nhỏ nhất</u> : Chú ý ằng tuy từ $A^2 \le 25$, ta có $-5 \le x \le 5$, nhưng không xảy ra $A^2 = -5$. Do tập xác định của A, ta có $x^2 \le 5 \Rightarrow -\sqrt{5} \le x \le \sqrt{5}$. Do đó : $2x \ge -2\sqrt{5}$ và $\sqrt{5-x^2} \ge 0$. Suy ra :

$$A = 2x + \sqrt{5-x^2} \ge -2\sqrt{5}. \text{ Min } A = -2\sqrt{5} \text{ với } x = -\sqrt{5}$$

b) Xét biểu thức phụ | A | và áp dụng các bất đẳng thức Bunhiacôpxki và Cauchy :

$$|A| = |x|\left(\sqrt{99}.\sqrt{99} + 1.\sqrt{101-x^2}\right) \le |x|\sqrt{(99+1)(99+101-x^2)} = |x|.10.\sqrt{200-x^2} <$$

$$< 10.\frac{x^2+200-x^2}{2} = 1000$$

$$|A| = 1000 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \le 101 \\ \dfrac{\sqrt{99}}{1} = \dfrac{\sqrt{99}}{\sqrt{101-x^2}} \\ x^2 = 200 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 10. \text{ Do đó : } -1000 < A < 1000.$$

min A = - 1000 với x = - 10 ; max A = 1000 với x = 10.

135. <u>*Cách 1*</u> : $A = x + y = 1.(x + y) = \left(\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y}\right)(x+y) = a + \dfrac{ay}{x} + \dfrac{bx}{y} + b$.

Theo bất đẳng thức Cauchy với 2 số dương : $\dfrac{ay}{x} + \dfrac{bx}{y} \ge 2\sqrt{\dfrac{ay}{x}.\dfrac{bx}{y}} = 2\sqrt{ab}$.

Do đó $A \ge a + b + 2\sqrt{ab} = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$.

$$\min A = \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 \text{ với } \begin{cases} \dfrac{ay}{x} = \dfrac{bx}{y} \\ \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} = 1 \\ x, y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + \sqrt{ab} \\ y = b + \sqrt{ab} \end{cases}$$

<u>*Cách 2*</u> : Dùng bất đẳng thức Bunhiacôpxki :

$$A = (x+y).1 = (x+y)\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y}\right) \ge \left(\sqrt{x.\frac{a}{x}} + \sqrt{y.\frac{b}{y}}\right)^2 = \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2.$$

Từ đó tìm được giá trị nhỏ nhất của A.

136. $A = (x + y)(x + z) = x^2 + xz + xy + yz = x(x + y + z) + yz \ge 2\sqrt{xyz(x+y+z)} = 2$

min A = 2 khi chẳng hạn y = z = 1 , x = $\sqrt{2}$ - 1.

137. Theo bất đẳng thức Cauchy : $\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}\ge 2\sqrt{\frac{xy}{z}.\frac{yz}{x}}=2y$.

Tương tự : $\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\ge 2z$; $\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\ge 2x$. Suy ra $2A \ge 2(x + y + z) = 2$.

$$\min A = 1 \text{ với } x = y = z = \frac{1}{3}.$$

138. Theo bài tập 24 : $\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{y+z}+\frac{z^2}{z+x}\ge\frac{x+y+z}{2}$. Theo bất đẳng thức Cauchy :

$$\frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}\ ;\ \frac{y+z}{2}\ge\sqrt{yz}\ ;\ \frac{z+x}{2}\ge\sqrt{zx}\ \text{ nên }\ \frac{x+y+z}{2}\ge\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}}{2}=\frac{1}{2}.$$

$$\min A=\frac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ x=y=z=\frac{1}{3}.$$

139. a) $A=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2\le\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=2a+2b\le 2$.

$$\max A=2\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\sqrt{a}=\sqrt{b}\\ a+b=1\end{cases}\ \Leftrightarrow\ a=b=\frac{1}{2}$$

b) Ta có : $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^4\le\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^4+\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^4=2(a^2+b^2+6ab)$

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)^4\le 2(a^2+c^2+6ac)\ ;\ \left(\sqrt{a}+\sqrt{d}\right)^4\le 2(a^2+d^2+6ad)$$

Tương tự : $\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^4\le 2(b^2+c^2+6bc)\ ;\ \left(\sqrt{b}+\sqrt{d}\right)^4\le 2(b^2+d^2+6bd)$

$$\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)^4\le 2(c^2+d^2+6cd)$$

Suy ra : $B \le 6(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd) = 6(a + b + c + d)^2 \le 6$

$$\max B=6\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\sqrt{a}=\sqrt{b}=\sqrt{c}=\sqrt{d}\\ a+b+c+d=1\end{cases}\ \Leftrightarrow\ a=b=c=d=\frac{1}{4}$$

140. $A=3^x+3^y\ge 2.\sqrt{3^x.3^y}=2\sqrt{3^{x+y}}=2.\sqrt{3^4}=18$. min A = 18 với x = y = 2.

141. Không mất tính tổng quát, giả sử $a + b \ge c + d$. Từ giả thiết suy ra :

$$b+c\ge\frac{a+b+c+d}{2}.$$

$$A=\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b}=\frac{b+c}{c+d}-\left(\frac{c}{c+d}-\frac{c}{a+b}\right)\ge\frac{a+b+c+d}{2(c+d)}-\left(\frac{c+d}{c+d}-\frac{c+d}{a+b}\right)$$

Đặt $a + b = x$; $c + d = y$ với $x \ge y > 0$, ta có :

$$A\ge\frac{x+y}{2y}-\frac{y}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x}{2y}+\frac{1}{2}-1+\frac{y}{x}=\left(\frac{x}{2y}+\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{2}\ge 2.\sqrt{\frac{x}{2y}.\frac{y}{x}}-\frac{1}{2}=\sqrt{2}-\frac{1}{2}$$

$$\min A=\sqrt{2}-\frac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ d=0\ ,\ x=y\sqrt{2}\ ,\ b+c\ge a+d\ \text{; chẳng hạn khi}$$

$$a=\sqrt{2}+1,b=\sqrt{2}-1,c=2,d=0$$

142. a) $(x-3)^2+(\sqrt{x}-\sqrt{3})^2=0$. Đáp số : x = 3.

b) Bình phương hai vế, đưa về : $(x^2 + 8)(x^2 - 8x + 8) = 0$. Đáp số : $x = 4 + 2\sqrt{2}$.
c) Đáp số : $x = 20$.
d) $\sqrt{x-1} = 2 + \sqrt{x+1}$. Vế phải lớn hơn vế trái. Vô nghiệm.
e) Chuyển vế : $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 1 + \sqrt{x-1}$. Bình phương hai vế. Đáp số : x = 1.
g) Bình phương hai vế. Đáp số : $\frac{1}{2} \le x \le 1$
h) Đặt $\sqrt{x-2} = y$. Đưa về dạng $|y-2| + |y-3| = 1$. Chú ý đến bất đẳng thức :

$|y-2| + |3-y| \ge |y-2+3-y| = 1$. Tìm được $2 \le y \le 3$. Đáp số : $6 \le x \le 11$.

i) Chuyển vế : $\sqrt{x + \sqrt{1-x}} = 1 - \sqrt{x}$, rồi bình phương hai vế. Đáp : x = 0 (chú ý loại $x = \frac{16}{25}$)
k) Đáp số : $\frac{16}{25}$.
l) Điều kiện : $x \ge 1$ hoặc x = - 1. Bình phương hai vế rồi rút gọn :

$$2\sqrt{2(x+1)^2(x+3)(x-1)} = x^2 - 1.$$

Bình phương hai vế : $8(x + 1)^2(x + 3)(x - 1) = (x + 1)^2(x - 1)^2 \Leftrightarrow (x + 1)^2(x - 1)(7x + 25) = 0$

$$x = -\frac{25}{7} \text{ loại. Nghiệm là : } x = \pm 1.$$

m) Vế trái lớn hơn x, vế phải không lớn hơn x. Phương trình vô nghiệm.
n) Điều kiện : $x \ge - 1$. Bình phương hai vế, xuất hiện điều kiện $x \le - 1$. Nghiệm là : x = - 1.
o) Do $x \ge 1$ nên vế trái lớn hơn hoặc bằng 2, vế phải nhỏ hơn hoặc bằng 2. Suy ra hai vế bằng 2, khi đó x = 1, thỏa mãn phương trình.
p) Đặt $\sqrt{2x+3+\sqrt{x+2}} = y$; $\sqrt{2x+2-\sqrt{x+2}} = z$ (1). Ta có :

$$y^2 - z^2 = 1 + 2\sqrt{x+2} \;;\; y + z = 1 + 2\sqrt{x+2}. \text{ Suy ra } y - z = 1.$$

Từ đó $z = \sqrt{x+2}$ (2). Từ (1) và (2) tính được x. Đáp số : x = 2 (chú ý loại x = - 1).
q) Đặt $2x^2 - 9x + 4 = a \ge 0$; $2x - 1 \ge b \ge 0$. Phương trình là : $\sqrt{a} + 3\sqrt{b} = \sqrt{a + 15b}$. Bình phương hai vế rồi rút gọn ta được : b = 0 hoặc b = a. Đáp số : $\frac{1}{2}$; 5

144. Ta có : $\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{2\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \frac{2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)}{\left(\sqrt{k+1} + \sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)} = 2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$.

Vậy : $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{2} - 1) + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + 2(\sqrt{4} - \sqrt{3}) + ... + 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) =$

$$= 2(\sqrt{n+1} - 1) \quad \text{(đpcm).}$$

150. Đưa các biểu thức dưới dấu căn về dạng các bình phương đúng. M = -2
151. Trục căn thức ở mẫu từng hạng tử. Kết quả : $A = \sqrt{n} - 1$.
152. Ta có : $\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{a+1}} = -(\sqrt{a} + \sqrt{a+1}) \Rightarrow P = -(\sqrt{2} + \sqrt{2n+1})$.

P không phải là số hữu tỉ (chứng minh bằng phản chứng).

153. Ta hãy chứng minh : $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \Rightarrow A=\dfrac{9}{10}$

154. $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\dfrac{1}{\sqrt{n}}.n=\sqrt{n}$.

155. Ta có a + 1 = $\sqrt{17}$. Biến đổi đa thức trong ngoặc thành tổng các lũy thừa cơ số a + 1

$$A = [(a + 1)^5 – 3(a + 1)^4 – 15(a + 1)^3 + 52(a + 1)^2 – 14(a + 1)]^{2000}$$
$$= (259\sqrt{17} - 225\sqrt{17} - 34\sqrt{17} - 1)^{2000} = 1.$$

156. Biến đổi : $\sqrt{a}-\sqrt{a-1}=\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}$; $\sqrt{a-2}-\sqrt{a-3}=\dfrac{1}{\sqrt{a-2}+\sqrt{a-3}}$.

157. $x^2-\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}=x^2-x+\dfrac{1}{4}+x-\sqrt{x}+\dfrac{1}{4}=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}\right)^2\ge 0$.

Dấu " = " không xảy ra vì không thể có đồng thời : $x=\dfrac{1}{2}$ và $\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}$.

168. Trước hết ta chứng minh : $a+b\le\sqrt{2(a^2+b^2)}$ (*) (a + b ≥ 0)

Áp dụng (*) ta có : $S=\sqrt{x-1}+\sqrt{y-2}\le\sqrt{2(x-1+y-2)}=\sqrt{2}$

$$\max S=\sqrt{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=y-2\\x+y=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}\\y=\dfrac{5}{2}\end{cases}$$

***** Có thể tính S^2 rồi áp dụng bất đẳng thức Cauchy.

180. Ta phải có | A | ≤ $\sqrt{3}$. Dễ thấy A > 0. Ta xét biểu thức : $B=\dfrac{1}{A}=2-\sqrt{3-x^2}$. Ta có :

$$0\le\sqrt{3-x^2}\le\sqrt{3}\Rightarrow-\sqrt{3}\le-\sqrt{3-x^2}\le 0\Rightarrow 2-\sqrt{3}\le 2-\sqrt{3-x^2}\le 2.$$

$$\min B=2-\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{3}=\sqrt{3-x^2}\Leftrightarrow x=0.\text{ Khi đó }\max A=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \max B=2\Leftrightarrow\sqrt{3-x^2}=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}.\text{ Khi đó min A = }\frac{1}{2}$$

181. Để áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta xét biểu thức : $B=\dfrac{2x}{1-x}+\dfrac{1-x}{x}$. Khi đó :

$$B\ge 2\sqrt{\frac{2x}{1-x}.\frac{1-x}{x}}=2\sqrt{2}.\ B=2\sqrt{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2x}{1-x}=\dfrac{1-x}{x} & (1)\\0<x<1 & (2)\end{cases}$$

Giải (1) : $2x^2 = (1 – x)^2$ ⇔ $|x\sqrt{2}| = |1 – x|$. Do 0 < x < 1 nên $x\sqrt{2} = 1 – x$ ⇔

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1.$$

Như vậy $\min B = 2\sqrt{2}$ ⇔ $x = \sqrt{2} - 1$.

Bây giờ ta xét hiệu : $A-B=\left(\dfrac{2}{1-x}+\dfrac{1}{x}\right)-\left(\dfrac{2x}{1-x}+\dfrac{1-x}{x}\right)=\dfrac{2-2x}{1-x}+\dfrac{1-1+x}{x}=2+1=3$

Do đó min A = $2\sqrt{2}$ + 3 khi và chỉ khi x = $\sqrt{2}$ - 1.

182. a) Điều kiện : $x \geq 1$, $y \geq 2$. Bất đẳng thức Cauchy cho phép làm giảm một tổng : $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Ở đây ta muốn làm tăng một tổng. Ta dùng bất đẳng thức : $a+b \leq \sqrt{2(a^2+b^2)}$

$$A = \sqrt{x-1} + \sqrt{y-2} \leq \sqrt{2(x-1+y-3)} = \sqrt{2}$$

$$\max A = \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = y-2 \\ x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1,5 \\ y = 2,5 \end{cases}$$

Cách khác : Xét A^2 rồi dùng bất đẳng thức Cauchy.

b) Điều kiện : $x \geq 1$, $y \geq 2$. Bất đẳng thức Cauchy cho phép làm trội một tích : $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

Ta xem các biểu thức $\sqrt{x-1}$, $\sqrt{y-2}$ là các tích : $\sqrt{x-1} = \sqrt{1.(x-1)}$, $\sqrt{y-2} = \frac{\sqrt{2(y-2)}}{\sqrt{2}}$

Theo bất đẳng thức Cauchy : $\frac{\sqrt{x-1}}{x} = \frac{1.(x-1)}{x} \leq \frac{1+x-1}{2x} = \frac{1}{2}$

$$\frac{\sqrt{y-2}}{y} = \frac{\sqrt{2.(y-2)}}{y\sqrt{2}} \leq \frac{2+y-2}{2y\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\max B = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ y-2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$$

183. $a = \frac{1}{\sqrt{1997}+\sqrt{1996}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{1998}+\sqrt{1997}}$. Ta thấy

$\sqrt{1997} + \sqrt{1996} < \sqrt{1998} + \sqrt{1997}$

Nên a < b.

184. a) min A = 5 - $2\sqrt{6}$ với x = 0. max A = $\frac{1}{5}$ với x = ± $\sqrt{6}$.

b) min B = 0 với x = 1 ± $\sqrt{5}$. max B = $\sqrt{5}$ với x = 1

185. Xét $-1 \leq x \leq 0$ thì $A \leq 0$. Xét $0 \leq x \leq 1$ thì $A = \sqrt{x^2(1-x^2)} \leq \frac{x^2+(1-x^2)}{2} = \frac{1}{2}$.

$$\max A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1-x^2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

186. A = | x – y | ≥ 0, do đó A lớn nhất khi và chỉ khi A^2 lớn nhất. Theo bđt Bunhiacôpxki :

$$A^2 = (x-y)^2 = \left(1.x - \frac{1}{2}.2y\right)^2 \leq \left(1+\frac{1}{4}\right)(x^2+4y^2) = \frac{5}{4}$$

$$\max A = \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2y}{x} = -\frac{1}{2} \\ x^2+4y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ y = \frac{\sqrt{5}}{10} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ y = -\frac{\sqrt{5}}{10} \end{cases}$$

187. a) *Tìm giá trị lớn nhất* : Từ giả thiết :

$$\begin{cases}0 \le x \le 1\\ 0 \le y \le 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^3 \le x^2\\ y^3 \le y^2\end{cases} \Leftrightarrow x^3 + y^3 \le x^2 + y^2 = 1$$

$$\max A = 1 \Leftrightarrow \begin{cases}x^3 = x^2\\ y^3 = y^2\end{cases} \Leftrightarrow x = 0, y = 1 \text{ V } x = 1, y = 0$$

b) *Tìm giá trị nhỏ nhất* : $(x + y)^2 \le 2(x^2 + y^2) = 2 \Rightarrow x + y \le \sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{x+y}{\sqrt{2}} \le 1$. Do đó :

$x^3 + y^3 \ge \dfrac{\left(x^3 + y^3\right)\left(x+y\right)}{\sqrt{2}}$. Theo bất đẳng thức Bunhiacôpxki :

$(x^3 + y^3)(x + y) = \left[\left(\sqrt{x^3}\right)^2 + \left(\sqrt{y^3}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{x}\right)^2 + \left(\sqrt{y}\right)^2\right] \ge \left(\sqrt{x^3}.\sqrt{x} + \sqrt{y^3}.\sqrt{y}\right)^2 = (x^2 + y^2) =$ 1

$$\min A = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

188. Đặt $\sqrt{x} = a$; $\sqrt{y} = b$, ta có $a, b \ge 0$, $a + b = 1$.

$$A = a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 – ab + b^2) = a^2 – ab + b^2 = (a + b)^2 – 3ab = 1 – 3ab.$$

Do $ab \ge 0$ nên $A \le 1$. $\max A = 1 \Leftrightarrow a = 0$ hoặc $b = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1, y = 0$.

Ta có $ab \le \dfrac{(a+b)^2}{4} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow ab \le \dfrac{1}{4} \Rightarrow 1 - 3ab \ge \dfrac{1}{4}$. $\min A = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x = y = \dfrac{1}{4}$

189. Điều kiện : $1 – x \ge 0$, $2 – x \ge 0$ nên $x \le 1$. Ta có :

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{(x-1)(x-2)} - |x-2|\sqrt{\frac{x-1}{x-2}} = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x} + \sqrt{(x-1)(x-2)} - \sqrt{(x-1)(x-2)} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{1-x} = 3 \Leftrightarrow x = -8.$$

190. Ta có : $6 + 4x + 2x^2 = 2(x^2 + 2x + 1) + 4 = 2(x + 1)^2 + 4 > 0$ với mọi x. Vậy phương trình xác định với mọi giá trị của x. Đặt $\sqrt{x^2 + 2x + 3} = y \ge 0$, phương trình có dạng :

$$y^2 - y\sqrt{2} - 12 = 0 \Leftrightarrow (y - 3\sqrt{2})(y + 2\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y = 3\sqrt{2}\\ y = -2\sqrt{2} \text{ (loai vì } y \ge 0\end{array}\right.$$

Do đó $\sqrt{x^2 + 2x + 3} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 = 18 \Leftrightarrow (x – 3)(x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 3$; $x = -5$.

191. Ta có :

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} = \sqrt{k}.\frac{1}{(k+1)k} = \sqrt{k}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sqrt{k}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

$= \left(1 + \dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}} - \dfrac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$. Do đó : $\dfrac{1}{(k+1)\sqrt{k}} < 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}} - \dfrac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$.

Vậy : $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3\sqrt{2}} + \dfrac{1}{4\sqrt{3}} + ... + \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) + ... + 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

$= 2\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right) < 2$ (đpcm).

192. Dùng bất đẳng thức Cauchy $\frac{1}{\sqrt{ab}} > \frac{2}{a+b}$ (a, b > 0 ; a ≠ 0).

193. Đặt $x - y = a$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = b$ (1) thì $a, b \in \mathbf{Q}$.

a) Nếu b = 0 thì x = y = 0, do đó $\sqrt{x}$, $\sqrt{y} \in \mathbf{Q}$.

b) Nếu b ≠ 0 thì $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{a}{b} \Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{a}{b} \in \mathbf{Q}$ (2).

Từ (1) và (2) : $\sqrt{x} = \frac{1}{2}\left(b + \frac{a}{b}\right) \in Q$; $\sqrt{y} = \frac{1}{2}\left(b - \frac{a}{b}\right) \in Q$.

199. Nhận xét : $\left(\sqrt{x^2+a^2}+x\right)\left(\sqrt{x^2+a^2}-x\right) = a^2$. Do đó :

$$2\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) \le \frac{5a^2}{\sqrt{x^2+a^2}} \;(1) \Leftrightarrow 2\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) \le \frac{5\left(\sqrt{x^2+a^2}+x\right)\left(\sqrt{x^2+a^2}-x\right)}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

Do a ≠ 0 nên : $\sqrt{x^2+a^2}+x > \sqrt{x^2}+x = |x|+x \ge 0$. Suy ra : $\sqrt{x^2+a^2}+x > 0$, ∀x.

Vì vậy : (1) $\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+a^2} \le 5\left(\sqrt{x^2+a^2}-x\right) \Leftrightarrow 5x \le 3\sqrt{x^2+a^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le 0 \\ \begin{cases} x > 0 \\ 25x^2 \le 9x^2+9a^2 \end{cases} \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le 0 \\ 0 < x \le \frac{3}{4}|a| \end{array}\right. \Leftrightarrow x \le \frac{3}{4}|a|.$$

207. c) Trước hết tính x theo a được $x = \frac{1-2a}{2\sqrt{a(1-a)}}$. Sau đó tính $\sqrt{1+x^2}$ được $\frac{1}{2\sqrt{a(1-a)}}$.

Đáp số : B = 1.

d) Ta có $a^2 + 1 = a^2 + ab + bc + ca = (a + b)(a + c)$. Tương tự :

$b^2 + 1 = (b + a)(b + c)$; $c^2 + 1 = (c + a)(c + b)$. Đáp số : M = 0.

208. Gọi vế trái là A > 0. Ta có $A^2 = \frac{2x+4}{\sqrt{x}}$. Suy ra điều phải chứng minh.

209. Ta có : $a + b = -1$, $ab = -\frac{1}{4}$ nên : $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = \frac{9}{4} - \frac{1}{9} = \frac{17}{8}$; $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = -1 - \frac{3}{4} = -\frac{7}{4}$

Do đó : $a^7 + b^7 = (a^3 + b^3)(a^4 + b^4) - a^3b^3(a + b) = -\frac{7}{4}.\frac{17}{8} - \left(-\frac{1}{64}\right)(-1) = -\frac{239}{64}$.

210. a) $a^2 = (\sqrt{2}-1)^2 = 3 - 2\sqrt{2} = \sqrt{9} - \sqrt{8}$.

$a^3 = (\sqrt{2}-1)^3 = 2\sqrt{2} - 6 + 3\sqrt{2} - 1 = 5\sqrt{2} - 7 = \sqrt{50} - \sqrt{49}$.

b) *Theo khai triển Newton* : $(1 - \sqrt{2})^n = A - B\sqrt{2}$; $(1 + \sqrt{2})^n = A + B\sqrt{2}$ với A, B ∈ N

Suy ra : $A^2 - 2B^2 = (A + B\sqrt{2})(A - B\sqrt{2}) = [(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})]^n = (-1)^n$.

Nếu n chẵn thì $A^2 - 2b^2 = 1$ (1). Nếu n lẻ thì $A^2 - 2B^2 = -1$ (2).

Bây giờ ta xét a^n. Có hai trường hợp :

* *Nếu n chẵn thì* : $a^n = (\sqrt{2} - 1)^n = (1 - \sqrt{2})^n = A - B\sqrt{2} = \sqrt{A^2} - \sqrt{2B^2}$. Điều kiện $A^2 - 2B^2 = 1$ được thỏa mãn do (1).

* *Nếu n lẻ thì* : $a^n = (\sqrt{2} - 1)^n = -(1 - \sqrt{2})^n = B\sqrt{2} - A = \sqrt{2B^2} - \sqrt{A^2}$. Điều kiện $2B^2 - A^2 = 1$ được thỏa mãn do (2).

211. Thay $a = \sqrt{2}$ vào phương trình đã cho : $2\sqrt{2} + 2a + b\sqrt{2} + c = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}(b + 2) = -(2a + c).$$

Do a, b, c hữu tỉ nên phải có b + 2 = 0 do đó 2a + c = 0. Thay b = - 2 , c = - 2a vào phương trình đã cho :

$$x^3 + ax^2 - 2x - 2a = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2) + a(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2)(x + a) = 0.$$

Các nghiệm phương trình đã cho là: $\pm\sqrt{2}$ và $-a$.

212. Đặt $A = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

a) *Chứng minh* $A > 2\sqrt{n} - 3$: **Làm giảm mỗi số hạng của A :**

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = 2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right).$$

$$\text{Do đó} \quad A > 2\left[\left(-\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) + \left(-\sqrt{3} + \sqrt{4}\right) + ... + \left(-\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)\right] =$$

$$= 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{2}\right) = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} > 2\sqrt{n+1} - 3 > 2\sqrt{n} - 3.$$

b) *Chứng minh* $A < 2\sqrt{n} - 2$: **Làm trội mỗi số hạng của A :**

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = 2\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)$$

$$\text{Do đó :} \quad A < 2\left[\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) + ... + \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{2} - \sqrt{1}\right)\right] = 2\sqrt{n} - 2.$$

213. Kí hiệu $a_n = \sqrt{6 + \sqrt{6 + ... + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}}$ có n dấu căn. Ta có :

$$a_1 = \sqrt{6} < 3 ; a_2 = \sqrt{6 + a_1} < \sqrt{6 + 3} = 3 ; a_3 = \sqrt{6 + a_2} < \sqrt{6 + 3} = 3 ... a_{100} = \sqrt{6 + a_{99}} < \sqrt{6 + 3} = 3$$

Hiển nhiên $a_{100} > \sqrt{6} > 2$. Như vậy $2 < a_{100} < 3$, do đó $[a_{100}] = 2$.

214. a) <u>Cách 1</u> (tính trực tiếp) : $a^2 = (2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$.

Ta có $4\sqrt{3} = \sqrt{48}$ nên $6 < 4\sqrt{3} < 7 \Rightarrow 13 < a^2 < 14$. Vậy $[a^2] = 13$.

<u>Cách 2</u> (tính gián tiếp) : Đặt $x = (2 + \sqrt{3})^2$ thì $x = 7 + 4\sqrt{3}$.

Xét biểu thức $y = (2 - \sqrt{3})^2$ thì $y = 7 - 4\sqrt{3}$. Suy ra $x + y = 14$.

Dễ thấy $0 < 2 - \sqrt{3} < 1$ nên $0 < (2 - \sqrt{3})^2 < 1$, tức là $0 < y < 1$. Do đó $13 < x < 14$.

Vậy $[x] = 13$ tức là $[a^2] = 13$.

b) Đáp số : $[a^3] = 51$.

215. Đặt $x - y = a$; $\sqrt{x} + \sqrt{y} = b$ (1) thì a và b là số hữu tỉ. Xét hai trường hợp :

a) Nếu $b \neq 0$ thì $\frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{a}{b} \Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{a}{b}$ là số hữu tỉ (2). Từ (1) và (2) ta có :

$$\sqrt{x} = \frac{1}{2}\left(b + \frac{a}{b}\right) \text{ là số hữu tỉ ; } \sqrt{y} = \frac{1}{2}\left(b - \frac{a}{b}\right) \text{ là số hữu tỉ.}$$

b) Nếu b = 0 thì x = y = 0, hiển nhiên $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ là số hữu tỉ.

216. Ta có $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{n}}{n(n+1)} = \sqrt{n}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) = \sqrt{n}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right) =$

$$= \left(1 + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) < 2\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$ Từ đó ta giải được bài toán.

217. Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử trong 25 số tự nhiên đã cho, không có hai số nào bằng nhau. Không mất tính tổng quát, giả sử $a_1 < a_2 < \ldots. < a_{25}$. Suy ra : $a_1 \ge 1$, $a_2 \ge 2$, … $a_{25} \ge 25$. Thế thì : $\dfrac{1}{\sqrt{a_1}} + \dfrac{1}{\sqrt{a_2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{a_{25}}} \le \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{25}}$ (1). Ta lại có :

$$\frac{1}{\sqrt{25}} + \frac{1}{\sqrt{24}} + ... + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{1}} = \frac{2}{\sqrt{25}+\sqrt{25}} + \frac{2}{\sqrt{24}+\sqrt{24}} + ... + \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} + 1 <$$

$$< \frac{2}{\sqrt{24}+\sqrt{24}} + \frac{2}{\sqrt{23}+\sqrt{23}} + ... + \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} + 1 = 2\left(\sqrt{25} - \sqrt{24} + \sqrt{24} - \sqrt{23} + ... + \sqrt{2} - \sqrt{1}\right) + 1 =$$

$$= 2\left(\sqrt{25} - \sqrt{1}\right) + 1 = 9 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $\dfrac{1}{\sqrt{a_1}} + \dfrac{1}{\sqrt{a_2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{a_{25}}} < 9$, trái với giả thiết. Vậy tồn tại hai số bằng nhau trong 25 số a_1 , a_2 , … , a_{25}.

218. Điều kiện : $0 \le x \le 4$. Đặt $\sqrt{2+\sqrt{x}} = a \ge 0$; $\sqrt{2-\sqrt{x}} = b \ge 0$.

Ta có : $ab = \sqrt{4-x}$, $a^2 + b^2 = 4$. Phương trình là : $\dfrac{a^2}{\sqrt{2}+a} + \dfrac{b^2}{\sqrt{2}-b} = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow a^2\sqrt{2} - a^2b + b^2\sqrt{2} + ab^2 = \sqrt{2}(2 - b\sqrt{2} + a\sqrt{2} - ab)$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}(a^2 + b^2 - 2 + ab) - ab(a - b) = 2(a - b)$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}(2 + ab) = (a - b)(2 + ab) \quad (\text{chú ý : } a^2 + b^2 = 4)$$

$$\Rightarrow a - b = \sqrt{2} \quad (\text{do } ab + 2 \ne 0)$$

Bình phương : $a^2 + b^2 - 2ab = 2 \Rightarrow 2ab = 2 \Rightarrow ab = 1 \Rightarrow \sqrt{4-x} = 1$. Tìm được $x = 3$.

219. Điều kiện : $0 < x \le 1$, $a \ge 0$. Bình phương hai vế rồi thu gọn : $\sqrt{1-x^2} = \dfrac{a-1}{a+1}$.

Với $a \ge 1$, bình phương hai vế, cuối cùng được : $x = \dfrac{2\sqrt{a}}{a+1}$.

Điều kiện $x \le 1$ thỏa mãn (theo bất đẳng thức Cauchy).

Kết luận : Nghiệm là $x = \dfrac{2\sqrt{a}}{a+1}$. Với $a \ge 1$.

220. Nếu x = 0 thì y = 0, z = 0. Tương tự đối với y và z. Nếu $xyz \ne 0$, hiển nhiên x, y, z > 0

Từ hệ phương trình đã cho ta có : $\sqrt{x} = \dfrac{2y}{1+y} \le \dfrac{2y}{2\sqrt{y}} = \sqrt{y}$.

Tương tự $\sqrt{y} \le \sqrt{z}$; $\sqrt{z} \le \sqrt{x}$. Suy ra x = y = z. Xảy ra dấu " = " ở các bất đẳng thức trên với x = y = z = 1. Kết luận : Hai nghiệm (0 ; 0 ; 0) , (1 ; 1 ; 1).

221. a) Đặt $A = (8 + 3\sqrt{7})^7$. Để chứng minh bài toán, chỉ cần tìm số B sao cho $0 < B < \frac{1}{10^7}$ và A + B là số tự nhiên.

Chọn $B = (8 - 3\sqrt{7})^7$. Dễ thấy B > 0 vì $8 > 3\sqrt{7}$. Ta có $8 + 3\sqrt{7} > 10$ suy ra :

$$\frac{1}{\left(8+3\sqrt{7}\right)^7} < \frac{1}{10^7} \Rightarrow \left(8-3\sqrt{7}\right)^7 < \frac{1}{10^7}$$

Theo khai triển Newton ta lại có : $A = (8 + 3\sqrt{7})^7 = a + b\sqrt{7}$ với $a, b \in N$.

$B = (8 - 3\sqrt{7})^7 = a - b\sqrt{7}$. Suy ra A + B = 2a là số tự nhiên.

Do $0 < B < \frac{1}{10^7}$ và A + B là số tự nhiên nên A có bảy chữ số 9 liền sau dấu phẩy.

Chú ý : $10^{-7} = 0{,}0000001$.

b) Giải tương tự như câu a.

222. Ta thấy với n là số chính phương thì $\sqrt{n}$ là số tự nhiên, nếu n khác số chính phương thì $\sqrt{n}$ là số vô tỉ, nên $\sqrt{n}$ không có dạng $\overline{....,5}$. Do đó ứng với mỗi số $n \in N^*$ có duy nhất một số nguyên a_n gần $\sqrt{n}$ nhất.

Ta thấy rằng, với n bằng 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, … thì a_n bằng 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, … Ta sẽ chứng minh rằng a_n lần lượt nhận các giá trị : hai số 1, bốn số 2, sáu số 3… Nói cách khác ta sẽ chứng minh bất phương trình :

$$1-\frac{1}{2} < \sqrt{x} < 1+\frac{1}{2} \text{ có hai nghiệm tự nhiên.}$$

$$2-\frac{1}{2} < \sqrt{x} < 2+\frac{1}{2} \text{ có bốn nghiệm tự nhiên.}$$

$$3-\frac{1}{2} < \sqrt{x} < 3+\frac{1}{2} \text{ có sáu nghiệm tự nhiên.}$$

Tổng quát : $k-\frac{1}{2} < \sqrt{x} < k+\frac{1}{2}$ có 2k nghiệm tự nhiên. Thật vậy, bất đẳng thức tương đương với : $k^2 - k + \frac{1}{4} < x < k^2 + k + \frac{1}{4}$. Rõ ràng bất phương trình này có 2k nghiệm tự nhiên là : $k^2 - k + 1$; $k^2 - k + 2$; … ; $k^2 + k$. Do đó :

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_{1980}} = \left(\underbrace{\frac{1}{1}+\frac{1}{1}}_{2\text{ số}}\right)+\left(\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}_{4\text{ số}}\right)+\ldots+\left(\underbrace{\frac{1}{44}+\frac{1}{44}+\ldots+\frac{1}{44}}_{88\text{ số}}\right) = 2.44 = 88.$$

223. Giải tương tự bài 24.

a) $1 < a_n < 2$. Vậy $[a_n] = 1$.

b) $2 \le a_n \le 3$. Vậy $[a_n] = 2$.

c) Ta thấy : $44^2 = 1936 < 1996 < 2025 = 45^2$, còn $46^2 = 2116$.

$$a_1 = \sqrt{1996} = 44 < a_1 < 45.$$

Hãy chứng tỏ với $n \ge 2$ thì $45 < a_n < 46$.

Như vậy với n = 1 thì $[a_n] = 44$, với $n \ge 2$ thì $[a_n] = 45$.

224. Cần tìm số tự nhiên B sao cho $B \le A < B + 1$. Làm giảm và làm trội A để được hai số tự nhiên liên tiếp.

Ta có : $(4n + 1)^2 < 16n^2 + 8n + 3 < (4n + 2)^2 \Rightarrow 4n + 1 < \sqrt{16n^2+8n+3} < 4n + 2$

$$\Rightarrow 4n^2 + 4n + 1 < 4n^2 + \sqrt{16n^2+8n+3} < 4n^2 + 4n + 2 < 4n^2 + 8n + 4$$

$$\Rightarrow (2n + 1)^2 < 4n^2 + \sqrt{16n^2+8n+3} < (2n + 2)^2.$$

Lấy căn bậc hai : $2n + 1 < A < 2n + 2$. Vậy $[A] = 2n + 1$.

225. Để chứng minh bài toán, ta chỉ ra số y thỏa mãn hai điều kiện : $0 < y < 0,1$ **(1)**.

x + y là một số tự nhiên có tận cùng bằng 2 **(2)**.

Ta chọn $y = \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{200}$. Ta có $0 < \sqrt{3}-\sqrt{2} < 0,3$ nên $0 < y < 0,1$. Điều kiện (1) được chứng minh.

Bây giờ ta chứng minh x + y là một số tự nhiên có tận cùng bằng 2. Ta có :

$$x+y=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{200}+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{200}=\left(5+2\sqrt{6}\right)^{100}+\left(5-2\sqrt{6}\right)^{100}.$$

Xét biểu thức tổng quát $S_n = a^n + b^n$ với $a = 5 + 2\sqrt{6}$, $b = 5 - 2\sqrt{6}$.

$$S_n = (5 + 2\sqrt{6})^n = (5 - 2\sqrt{6})^n$$

A và b có tổng bằng 10, tích bằng 1 nên chúng là nghiệm của phương trình $X^2 - 10X + 1 = 0$, tức là : $a^2 = 10a – 1$ **(3)** ; $b^2 = 10b – 1$ **(4)**.

Nhân (3) với a^n , nhân (4) với b^n : $a^{n+2} = 10a^{n+1} – a^n$; $b^{n+2} = 10b^{n+1} – b^n$.

Suy ra $(a^{n+2} + b^{n+2}) = 10(a^{n+1} + b^{n+1}) – (a^n + b^n)$,

tức là $S_{n+2} = 10S_{n+1} – S_n$, hay $S_{n+2} \equiv - S_{n+1}$ (mod 10)

Do đó $S_{n+4} \equiv - S_{n+2} \equiv S_n$ (mod 10) **(5)**

Ta có $S_0 = (5 + 2\sqrt{6})^0 + (5 - 2\sqrt{6})^0 = 1 + 1 = 2$; $S_1 = (5 + 2\sqrt{6}) + (5 - 2\sqrt{6}) = 10$.

Từ công thức (5) ta có $S_2 , S_3 , \dots , S_n$ là số tự nhiên, và $S_0 , S_4 , S_8 , \dots , S_{100}$ có tận cùng bằng 2, tức là tổng x + y là một số tự nhiên có tận cùng bằng 2. Điều kiện (2) được chứng minh. Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

226. Biến đổi $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{250}=\left(5+2\sqrt{6}\right)^{125}$. Phần nguyên của nó có chữ số tận cùng bằng 9.

(Giải tương tự bài 36)

227. Ta có :

$$A=\left(\left[\sqrt{1}\right]+...+\left[\sqrt{3}\right]\right)+\left(\left[\sqrt{4}\right]+...+\left[\sqrt{8}\right]\right)+\left(\left[\sqrt{9}\right]+...+\left[\sqrt{15}\right]\right)+\left(\left[\sqrt{16}\right]+...+\left[\sqrt{24}\right]\right)$$

Theo cách chia nhóm như trên, nhóm 1 có 3 số, nhóm 2 có 5 số, nhóm 3 có 7 số, nhóm 4 có 9 số. Các số thuộc nhóm 1 bằng 1, các số thuộc nhóm 2 bằng 2, các số thuộc nhóm 3 bằng 3, các số thuộc nhóm 4 bằng 4.

Vậy $A = 1.3 + 2.5 + 3.7 + 4.9 = 70$

228. a) Xét $0 \le x \le 3$. Viết A dưới dạng : $A = 4.\frac{x}{2}.\frac{x}{2}.(3 – x)$. Áp dụng bất đẳng thức

Cauchy cho 3 số không âm $\frac{x}{2}, \frac{x}{2}, (3 – x)$ ta được : $\frac{x}{2}.\frac{x}{2}.(3 – x) \le \left(\dfrac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+3-x}{3}\right)^3=1.$

Do đó $A \le 4$ (1)

b) Xét $x > 3$, khi đó $A \le 0$ (2). So sánh (1) và (2) ta đi đến kết luận :

$$\max A = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2} = 3 - x \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

229. a) Lập phương hai vế, áp dụng hằng đẳng thức $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$, ta được :

$x + 1 + 7 - x + 3.\sqrt[3]{(x+1)(7-x)}.2 = 8 \Leftrightarrow (x+1)(7-x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$; $x = 7$ (thỏa)

b) Điều kiện : $x \ge -1$ (1). Đặt $\sqrt[3]{x-2} = y$; $\sqrt{x+1} = z$. Khi đó $x - 2 = y^2$; $x + 1 = z^2$ nên $z^2 - y^3 = 3$. Phương trình đã cho được đưa về hệ :

$$\begin{cases} y + z = 3 \quad (2) \\ z^2 - y^3 = 3 \quad (3) \\ z \ge 0 \quad (4) \end{cases}$$

Rút z từ (2) : $z = 3 - y$. Thay vào (3) : $y^3 - y^2 + 6y - 6 = 0 \Leftrightarrow (y - 1)(y^2 + 6) = 0 \Leftrightarrow y = 1$
Suy ra $z = 2$, thỏa mãn (4). Từ đó $x = 3$, thỏa mãn (1). Kết luận : $x = 3$.

230. a) Có, chẳng hạn : $\sqrt{\dfrac{1}{2}} + \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \sqrt{2}$.

b) Không. Giả sử tồn tại các số hữu tỉ dương a, b mà $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt[4]{2}$. Bình phương hai vế :

$$a + b + 2\sqrt{ab} = \sqrt{2} \Rightarrow 2\sqrt{ab} = \sqrt{2} - (a + b).$$

Bình phương 2 vế : $4ab = 2 + (a + b)^2 - 2(a + b)\sqrt{2} \Rightarrow 2(a + b)\sqrt{2} = 2 + (a + b)^2 - 4ab$
Vế phải là số hữu tỉ, vế trái là số vô tỉ (vì $a + b \ne 0$), mâu thuẫn.

231. a) Giả sử $\sqrt[3]{5}$ là số hữu tỉ $\dfrac{m}{n}$ (phân số tối giản). Suy ra $5 = \dfrac{m^3}{n^3}$. Hãy chứng minh rằng cả m lẫn n đều chia hết cho 5, trái giả thiết $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản.

b) Giả sử $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ là số hữu tỉ $\dfrac{m}{n}$ (phân số tối giản). Suy ra :

$$\frac{m^3}{n^3} = \left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)^3 = 6 + 3.\sqrt[3]{8}.\frac{m}{n} = 6 + \frac{6m}{n} \Rightarrow m^3 = 6n^3 + 6mn^2 \ (1) \Rightarrow m^3 \vdots 2 \Rightarrow m \vdots 2$$

Thay $m = 2k$ ($k \in Z$) vào (1) : $8k^3 = 6n^3 + 12kn^2 \Rightarrow 4k^3 = 3n^3 + 6kn^2$. Suy ra $3n^3$ chia hết cho 2 $\Rightarrow n^3$ chia hết cho 2 $\Rightarrow$ n chia hết cho 2. Như vậy m và n cùng chia hết cho 2, trái với giả thiết $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản.

232. *Cách 1* : Đặt $a = x^3$, $b = y^3$, $c = z^3$. Bất đẳng thức cần chứng minh $\dfrac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$ tương đương với $\dfrac{x^3+y^3+z^3}{3} \ge xyz$ hay $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \ge 0$. Ta có hằng đẳng thức :

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]. \text{ (bài tập sbt)}$$

Do $a, b, c \ge 0$ nên $x, y, z \ge 0$, do đó $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \ge 0$. Như vậy : $\dfrac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$

Xảy ra dấu đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 2 : Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức Cauchy cho bốn số không âm. Ta có :

$$\frac{a+b+c+d}{4}=\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}\right)\geq\frac{1}{2}\left(\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\right)\geq\sqrt{\sqrt{ab}.\sqrt{cd}}=\sqrt[4]{abcd}$$

Trong bất đẳng thức $\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4\geq abcd$, đặt $d=\frac{a+b+c}{3}$ ta được :

$$\left(\frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4}\right)^4\geq abc.\frac{a+b+c}{3}\Rightarrow\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4\geq abc.\frac{a+b+c}{3}.$$

Chia hai vế cho số dương $\frac{a+b+c}{3}$ (trường hợp một trong các số a, b, c bằng 0, bài toán được chứng minh) : $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3\geq abc\Leftrightarrow\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$.

Xảy ra đẳng thức : $a=b=c=\frac{a+b+c}{3}\Leftrightarrow a=b=c=1$

233. Từ giả thiết suy ra : $\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}+\frac{d}{d+1}\leq 1-\frac{a}{a+1}=\frac{1}{a+1}$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương : $\frac{1}{a+1}\geq\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}+\frac{d}{d+1}\geq 3.\sqrt[3]{\frac{bcd}{(b+1)(c+1)(d+1)}}$. Tương tự :

$$\frac{1}{b+1}\geq 3.\sqrt[3]{\frac{acd}{(a+1)(c+1)(d+1)}}$$

$$\frac{1}{c+1}\geq 3.\sqrt[3]{\frac{abd}{(a+1)(b+1)(d+1)}}$$

$$\frac{1}{d+1}\geq 3.\sqrt[3]{\frac{abc}{(a+1)(b+1)(c+1)}}$$

Nhân từ bốn bất đẳng thức : $1\geq 81abcd\Rightarrow abcd\leq\frac{1}{81}$.

234. Gọi $A=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}$. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki :

$$3A=\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\right)(1+1+1)\geq\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)^2\quad(1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy với ba số không âm : $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\geq 3.\sqrt[3]{\frac{x}{y}.\frac{y}{z}.\frac{z}{x}}=3\quad(2)$

Nhân từng vế (1) với (2) : $3A\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\geq 3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)^2\Rightarrow A\geq\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$

235. Đặt $x=\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}$; $y=\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}$ thì $x^3+y^3=6$ (1). Xét hiệu b^3-a^3, ta được :

$$b^3-a^3=24-(x+y)^3=24-(x^3+y^3)-3xy(x+y)$$

Do (1), ta thay 24 bởi $4(x^3+b^3)$, ta có :

$$b^3 - a^3 = 4(x^3 + y^3) - (x^3 + y^3) - 3xy(x + y) = 3(x^3 + y^3) - 3xy(x + y) =$$
$$= 3(x + y)(x^2 - xy + y^2 - xy) = 3(x + y)(x - y)^2 > 0 \quad (\text{vì } x > y > 0).$$

Vậy $b^3 > a^3$, do đó $b > a$.

236. a) Bất đẳng thức đúng với $n = 1$. Với $n \geq 2$, theo khai triển Newton, ta có :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n.\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}.\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}.\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{n!}.\frac{1}{n^n}$$
$$< 1 + 1 + \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right)$$

Dễ dàng chứng minh : $\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} =$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1$$

Do đó $(1+\frac{1}{n})^n < 3$

b) Với $n = 2$, ta chứng minh $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$ (1). Thật vậy, (1) $\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{3}\right)^6 > \left(\sqrt{2}\right)^6 \Leftrightarrow 3^2 > 2^2$.

Với $n \geq 3$, ta chứng minh $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$ (2). Thật vậy :

$$(2) \Leftrightarrow \left(\sqrt[n+1]{n+1}\right)^{n(n+1)} < \left(\sqrt[n]{n}\right)^{n(n+1)} \Leftrightarrow (n+1)^n < n^{n+1} \Leftrightarrow \frac{(n+1)^n}{n^n} < n \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n \quad (3)$$

Theo câu a ta có $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$, mà $3 \leq n$ nên (3) được chứng minh.

Do đó (2) được chứng minh.

237. Cách 1 : $A^2 = 2\left(x^2 + 1 + \sqrt{x^4 + x^2 + 1}\right) \geq 4$. min A = 2 với $x = 0$.

Cách 2 : Áp dụng bất đẳng thức Cauchy :

$$A \geq 2\sqrt[4]{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)} = 2\sqrt[4]{x^4 + x^2 + 1} \geq 2$$

min A = 2 với $x = 0$.

238. Với $x < 2$ thì $A \geq 0$ (1). Với $2 \leq x \leq 4$, xét $-A = x^2(x - 2)$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số không âm :

$$-\frac{A}{4} = \frac{x}{2}.\frac{x}{2}.(x-2) \leq \left(\frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + x - 2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2x-2}{3}\right)^3 \leq 8$$

$-A \leq 32 \Rightarrow A \geq -32$. min A = - 32 với $x = 4$.

239. Điều kiện : $x^2 \leq 9$.

$$A^2 = x^4(9 - x^2) = 4.\frac{x^2}{2}.\frac{x^2}{2}(9 - x^2) \leq 4\left(\frac{\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + 9 - x^2}{3}\right)^3 = 4.27$$

max A = $6\sqrt{3}$ với $x = \pm\sqrt{6}$.

240. a) Tìm giá trị lớn nhất :

Cách 1 : Với $0 \le x < \sqrt{6}$ thì $A = x(x^2 - 6) \le 0$.

Với $x \ge \sqrt{6}$. Ta có $\sqrt{6} \le x \le 3 \Rightarrow 6 \le x^2 \le 9 \Rightarrow 0 \le x^2 - 6 \le 3$.

Suy ra $x(x^2 - 6) \le 9$. $\max A = 9$ với $x = 3$.

Cách 2 : $A = x(x^2 - 9) + 3x$. Ta có $x \ge 0$, $x^2 - 9 \le 0$, $3x \le 9$, nên $A \le 9$.

$$\max A = 9 \text{ với } x = 3$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất :

Cách 1 : $A = x^3 - 6x = x^3 + (2\sqrt{2})^3 - 6x - (2\sqrt{2})^3 =$

$$= (x + 2\sqrt{2})(x^2 - 2\sqrt{2}x + 8) - 6x - 16\sqrt{2}$$

$$= (x + 2\sqrt{2})(x^2 - 2\sqrt{2}x + 2) + (x + 2\sqrt{2}).6 - 6x - 16\sqrt{2}$$

$$= (x + 2\sqrt{2})(x - \sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2} \ge -4\sqrt{2}.$$

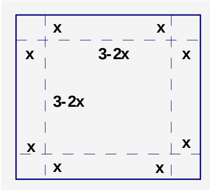
$$\min A = -4\sqrt{2} \text{ với } x = \sqrt{2}.$$

Cách 2 : Áp dụng bất đẳng thức Cauchy với 3 số không âm :

$$x^3 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \ge 3.\sqrt[3]{x^3.2\sqrt{2}.2\sqrt{2}} = 6x.$$

Suy ra $x^3 - 6x \ge -4\sqrt{2}$. $\min A = -4\sqrt{2}$ với $x = \sqrt{2}$.

241. Gọi x là cạnh của hình vuông nhỏ, V là thể tích của hình hộp.



Cần tìm giá trị lớn nhất của $V = x(3 - 2x)^2$.

Theo bất đẳng thức Cauchy với ba số dương :

$$4V = 4x(3 - 2x)(3 - 2x) \le \left(\frac{4x + 3 - 2x + 3 - 2x}{3}\right)^3 = 8$$

$$\max V = 2 \Leftrightarrow 4x = 3 - 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Thể tích lớn nhất của hình hộp là 2 dm^3 khi cạnh hình vuông nhỏ bằng $\frac{1}{2}$ dm.

242. a) Đáp số : 24 ; - 11. **b)** Đặt $\sqrt[3]{2 - x} = a$; $\sqrt{x - 1} = b$. Đáp số : 1 ; 2 ; 10.

c) Lập phương hai vế. Đáp số : 0 ; $\pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

d) Đặt $\sqrt[3]{2x - 1} = y$. Giải hệ : $x^3 + 1 = 2y$, $y^3 + 1 = 2x$, được $(x - y)(x^2 + xy + y^2 + 2) = 0$

$$\Leftrightarrow x = y. \text{ Đáp số : } 1 \ ; \ \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

e) Rút gọn vế trái được : $\frac{1}{2}\left(x - \sqrt{x^2 - 4}\right)$. Đáp số : x = 4.

g) Đặt $\sqrt[3]{7 - x} = a$; $\sqrt[3]{x - 5} = b$. Ta có : $a^3 + b^3 = 2$, $a^3 - b^3 = 12 - 2x$, do đó vế phải của phương trình đã cho là $\frac{a^3 - b^3}{2}$. Phương trình đã cho trở thành : $\frac{a - b}{a + b} = \frac{a^3 - b^3}{2}$.

Do $a^3 + b^3 = 2$ nên $\frac{a - b}{a + b} = \frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3} \Rightarrow (a - b)(a^3 + b^3) = (a + b)(a^3 - b^3)$

Do $a + b \ne 0$ nên : $(a - b)(a^2 - ab + b^2 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Từ a = b ta được x = 6. Từ ab = 0 ta được x = 7 ; x = 5.

h) Đặt $\sqrt[3]{x + 1} = a$; $\sqrt[3]{x - 1} = b$. Ta có : $a^2 + b^2 + ab = 1$ (1) ; $a^3 - b^3 = 2$ (2).

Từ (1) và (2) : a – b = 2. Thay b = a – 2 vào (1) ta được a = 1. Đáp số : x = 0.

i) *Cách 1* : x = - 2 nghiệm đúng phương trình. Với $x + 2 \neq 0$, chia hai vế cho $\sqrt[3]{x+2}$.

Đặt $\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x+2}} = a$; $\sqrt{\dfrac{x+3}{x+2}} = b$. Giải hệ $a^3 + b^3 = 2$, $a + b = - 1$. Hệ này vô nghiệm.

Cách 2 : Đặt $\sqrt[3]{x+2}$ = y. Chuyển vế : $\sqrt[3]{y^3-1} + \sqrt[3]{y^3+1} = -y$. Lập phương hai vế ta được :

$$y^3 - 1 + y^3 + 1 + 3.\sqrt[3]{y^6-1}.(-y) = -y^3 \Leftrightarrow y^3 = y.\sqrt[3]{y^6-1}.$$

Với y = 0, có nghiệm x = - 2. Với $y \neq 0$, có $y^2 = \sqrt[3]{y^6-1}$. Lập phương : $y^6 = y^6 - 1$. Vô n_0.

Cách 3 : Ta thấy x = - 2 nghiệm đúng phương trình. Với x < - 2, x > - 2, phương trình vô nghiệm, xem bảng dưới đây :

x	$\sqrt[3]{x+1}$	$\sqrt[3]{x+2}$	$\sqrt[3]{x+3}$	Vế trái
x < - 2 x > - x	< - 1 > - 1	< 0 > 0	< 1 > 1	< 0 > 0

k) Đặt 1 + x = a , 1 – x = b. Ta có : a + b = 2 (1), $\sqrt[4]{ab} + \sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} = 3$ (2)

Theo bất đẳng thức Cauchy $\sqrt{mn} \leq \dfrac{m+n}{2}$, ta có :

$$3 = \sqrt{\sqrt{a}.\sqrt{b}} + \sqrt{1.\sqrt{a}} + \sqrt{1.\sqrt{b}} \leq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} + \frac{1+\sqrt{a}}{2} + \frac{1+\sqrt{b}}{2} =$$

$$= \sqrt{a} + \sqrt{b} + 1 \leq \frac{1+a}{2} + \frac{1+b}{2} + 1 = \frac{a+b}{2} + 2 = 3.$$

Phải xảy ra dấu đẳng thức, tức là : a = b = 1. Do đó x = 0.

l) Đặt $\sqrt[4]{a-x} = m \geq 0$; $\sqrt[4]{b-x} = n \geq 0$ thì $m^4 + n^4 = a + b - 2x$.

Phương trình đã cho trở thành : m + n = $\sqrt[4]{m^4+n^4}$. Nâng lên lũy thừa bậc bốn hai vế rồi thu gọn : $2mn(2m^2 + 3mn + 2n^2) = 0$.

Suy ra m = 0 hoặc n = 0, còn nếu m, n > 0 thì $2m^2 + 3mn + 2n^2 > 0$.

Do đó x = a , x = b. Ta phải có $x \leq a$, $x \leq b$ để các căn thức có nghĩa.

Giả sử $a \leq b$ thì nghiệm của phương trình đã cho là x = a.

243. Điều kiện để biểu thức có nghĩa : $a^2 + b^2 \neq 0$ (a và b không đồng thời bằng 0).

Đặt $\sqrt[3]{a} = x$; $\sqrt[3]{b} = y$, ta có : $A = \dfrac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{x^2 + xy + y^2} = \dfrac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^2y^2}{x^2 + xy + y^2} =$

$$= \frac{\left(x^2+y^2\right)^2 - (xy)^2}{x^2 + xy + y^2} = \frac{\left(x^2+y^2+xy\right)\left(x^2+y^2-xy\right)}{x^2+y^2+xy} = x^2 + y^2 - xy.$$

Vậy : $A = \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} - \sqrt[3]{ab}$ (với $a^2 + b^2 \neq 0$).

244. Do A là tổng của hai biểu thức dương nên ta có thể áp dụng bất đẳng thức Cauchy :

$$A = \sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x^2+x+1} \geq 2\sqrt{\sqrt{x^2-x+1}.\sqrt{x^2+x+1}} = 2\sqrt[4]{(x^2-x+1)(x^2+x+1)} =$$

$= 2\sqrt[4]{x^4+x^2+2} \geq 2$. Đẳng thức xảy ra khi :

$$\begin{cases} x^2+x+1 = x^2-x+1 \\ x^4+x^2+1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Ta có $A \geq 2$, đẳng thức xảy ra khi x = 0. Vậy : min A = 2 $\Leftrightarrow$ x = 0.

245. Vì $1+\sqrt{3}$ là nghiệm của phương trình $3x^3 + ax^2 + bx + 12 = 0$, nên ta có :

$$3(1+\sqrt{3})^3 + a(1+\sqrt{3})^2 + b(1+\sqrt{3}) + 12 = 0.$$

Sau khi thực hiện các phép biến đổi, ta được biểu thức thu gọn :

$$(4a + b + 42) + (2a + b + 18)\sqrt{3} = 0.$$

Vì a, b $\in$ **Z** nên $p = 4a + b + 42 \in \mathbf{Z}$ và $q = 2a + b + 18 \in \mathbf{Z}$. Ta phải tìm các số nguyên a, b sao cho $p + q\sqrt{3} = 0$.

Nếu $q \neq 0$ thì $\sqrt{3} = -\dfrac{p}{q}$, vô lí. Do đó $q = 0$ và từ $p + q\sqrt{3} = 0$ ta suy ra $p = 0$.

Vậy $1+\sqrt{3}$ là một nghiệm của phương trình $3x^3 + ax^2 + bx + 12 = 0$ khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} 4a+b+42=0 \\ 2a+b+18=0 \end{cases}.\quad \text{Suy ra } a = -12\ ;\ b = 6.$$

246. Giả sử $\sqrt[3]{3}$ là số hữu tỉ $\dfrac{p}{q}$ ($\dfrac{p}{q}$ là phân số tối giản). Suy ra : $3 = \dfrac{p^3}{q^3}$. Hãy chứng minh cả p và q cùng chia hết cho 3, trái với giả thiết $\dfrac{p}{q}$ là phân số tối giản.

247. a) Ta có : $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}} = \sqrt[6]{\left(1+\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt[6]{1+2\sqrt{2}+2} = \sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}$.

Do đó : $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}.\sqrt[6]{3-2\sqrt{2}} = \sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}.\sqrt[6]{3-2\sqrt{2}} = \sqrt[6]{3^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2} = 1.$

b) $\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}.\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = -1.$

248. Áp dụng hằng đẳng thức $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$, ta có :

$$a^3 = 20+14\sqrt{2}+20-14\sqrt{2}+3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})}.a \Leftrightarrow a^3 = 40+3\sqrt[3]{20^2-(14\sqrt{2})^2}.a$$

$\Leftrightarrow a^3 - 6a - 40 = 0 \Leftrightarrow (a-4)(a^2 + 4a + 10) = 0$. Vì $a^2 + 4a + 10 > 0$ nên $\Rightarrow a = 4$.

249. Giải tương tự bài 21.

250. $A = 2 + \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

251. Áp dụng : $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$.

Từ $x = \sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$. Suy ra $x^3 = 12 + 3.3x \Leftrightarrow x^3 - 9x - 12 = 0.$

252. Sử dụng hằng đẳng thức $(A - B)^3 = A^3 - B^3 - 3AB(A - B)$. Tính x^3. Kết quả M = 0

253. a) $x_1 = -2$; $x_2 = 25$.

b) Đặt $u = \sqrt[3]{x-9}$, $v = x-3$, ta được : $\begin{cases} u = v^3+6 \\ v = u^3+6 \end{cases} \Leftrightarrow u = v = -2 \Rightarrow x = 1.$

c) Đặt : $\sqrt[4]{x^2+32} = y > 0$. Kết quả $x = \pm 7$.

254. Đưa biểu thức về dạng : $A = \left|\sqrt{x^3+1}+1\right| + \left|\sqrt{x^3+1}-1\right|$. Áp dụng $|A| + |B| \geq |A + B|$

$$\min A = 2 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 0.$$

255. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy hai lần.

256. Đặt $\sqrt[3]{x} = y$ thì $\sqrt[3]{x^2} = y^2 \Rightarrow P = 2\sqrt[3]{x}+2$

258. Ta có : $P = \sqrt{\left(x-a\right)^2}+\sqrt{\left(x-b\right)^2} = |x - a| + |x - b| \geq |x - a + b - x| = b - a$ (a < b).

Dấu đẳng thức xảy ra khi $(x - a)(x - b) \geq 0 \Leftrightarrow a \leq x \leq b$. Vậy min $P = b - a \Leftrightarrow a \leq x \leq b$.

259. Vì $a + b > c$; $b + c > a$; $c + a > b$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho từng cặp số dương

$$\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)} \leq \frac{(a+b-c)+(b+c-a)}{2} = b$$

$$\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)} \leq \frac{(b+c-a)+(c+a-b)}{2} = c$$

$$\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)} \leq \frac{(c+a-b)+(a+b-c)}{2} = a$$

Các vế của 3 bất dẳng thức trên đều dương. Nhân 3 bất đẳng thức này theo từng vế ta được bất đẳng thức cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$a + b - c = b + c - a = c + a - b \Leftrightarrow a = b = c \text{ (tam giác đều).}$$

260. $|x - y| = \sqrt{(x-y)^2} = \sqrt{(x+y)^2 - 4xy} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$.

261. $2A = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$.

Ta có : $c - a = -(a - c) = -[(a - b) + (b - c)] = -(\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1) = -2\sqrt{2}$.

Do đó : $2A = (\sqrt{2} + 1)^2 + (\sqrt{2} - 1)^2 + (-2\sqrt{2})^2 = 14$. Suy ra $A = 7$.

262. Đưa pt về dạng : $\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2 + \left(\sqrt{y-3}-2\right)^2 + \left(\sqrt{z-5}-3\right)^2 = 0$.

263. Nếu $1 \leq x \leq 2$ thì $y = 2$.

264. Đặt : $\sqrt{x-1} = y \geq 0$. $M = \sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1}+2\right)\left(3-\sqrt{x-1}\right)$.

265. Gọi các kích thước của hình chữ nhật là x, y. Với mọi x, y ta có : $x^2 + y^2 \geq 2xy$. Nhưng $x^2 + y^2 = (8\sqrt{2})^2 = 128$, nên $xy \leq 64$. Do đó : max $xy = 64 \Leftrightarrow x = y = 8$.

266. Với mọi a, b ta luôn có : $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Nhưng $a^2 + b^2 = c^2$ (định lí Pytago) nên :

$c^2 \geq 2ab \Leftrightarrow 2c^2 \geq a^2 + b^2 + 2ab \Leftrightarrow 2c^2 \geq (a + b)^2 \Leftrightarrow c\sqrt{2} \geq a + b \Leftrightarrow c \geq \dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b.

267. Biến đổi ta được : $\left(\sqrt{a'b} - \sqrt{ab'}\right)^2 + \left(\sqrt{a'c} - \sqrt{ac'}\right)^2 + \left(\sqrt{b'c} - \sqrt{bc'}\right)^2 = 0$

268. $-2 \leq x \leq -1$; $1 \leq x \leq 2$.

---------------Hết---------------