Đề số 02

ĐỀ THI THỬ KỲ THI THPT QUỐC GIA 2016

Môn : TOÁN

Thời gian làm bài 180 phút

Câu 1 (2,0 điểm). Cho hàm số $y = x^4 + (m+1)x^2 - 2m - 1$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho khi $m = 1$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đã cho có ba điểm cực trị.

Câu 2 (1,0 điểm).

a) Giải phương trình $\dfrac{\sin 2x + \cos 2x - 3\sqrt{2}\sin x - 2}{(\sin x + \cos x)^2} = 1$.

b) Tìm số phức z thỏa mãn $z^2 = \sqrt{z^2 + \overline{z^2}}$.

Câu 3 (0,5 điểm). Giải phương trình $2^{2x+1} - 3.2^x - 2 = 0$.

Câu 4 (1,0 điểm). Giải bất phương trình $\sqrt{x} \geqslant \dfrac{x^4 - 2x^3 + 2x - 1}{x^3 - 2x^2 + 2x}$.

Câu 5 (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^1 x\left(\sqrt{x^2+1} + \mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x$.

Câu 6 (1,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $BD = 2a$; tam giác SAC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SC = a\sqrt{3}$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAD).

Câu 7 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 6. Đường thẳng chứa BD có phương trình $2x + y - 12 = 0$; đường thẳng AB qua điểm $M(5;1)$; đường thẳng BC qua điểm $N(9;3)$. Viết phương trình các cạnh của hình chữ nhật biết điểm B có hoành độ nguyên.

Câu 8 (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-3} = \dfrac{z}{2}$, $d_2 : \dfrac{x-5}{6} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z+5}{-5}$ và mặt phẳng $(P) : x - 2y + 2z - 1 = 0$. Tìm hai điểm M thuộc d_1 và N thuộc d_2 sao cho MN song song với (P) và cách (P) một khoảng bằng 2.

Câu 9 (0,5 điểm). Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển biểu thức $\left(x^3 - \dfrac{1}{x^2}\right)^n$, biết n là số tự nhiên thỏa mãn $C_n^4 = 13C_n^{n-2}$.

Câu 10 (1,0 điểm). Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{2a}{a^2+1} + \frac{2b}{b^2+1} + \frac{c^2-1}{c^2+1} \leqslant \frac{3}{2}$$

——— Hết ———

DeThiThu.Net

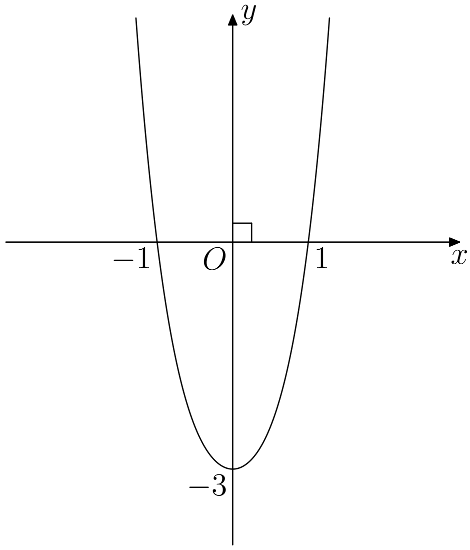
Đáp án đề số 02

ĐỀ THI THỬ KỲ THI THPT QUỐC GIA 2016
Môn : TOÁN
Thời gian làm bài 180 phút

Câu 1a (1,0 điểm).

Với $m = 1$ hàm số trở thành $y = x^4 + 2x^2 - 3$.
• Tập xác định : $D = \mathbb{R}$.
• Sự biến thiên :
+ Giới hạn tại vô cực :
$\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$.
+ Bảng biến thiên :
$y' = 4x^3 + 4x = 4x\left(x^2+1\right)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$



Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$
Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$; $y_{\text{CT}} = -3$.
• Đồ thị :
+ Cắt Ox tại hai điểm $(-1; 0)$ và $(1; 0)$.
+ Nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Câu 1b (1,0 điểm).

Đạo hàm $y' = 4x^3 + 2(m+1)x = 2x\left(2x^2 + m + 1\right)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2x^2 = -m-1 \end{array}\right.$.

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y'$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -m-1 > 0 \Leftrightarrow m < -1$.
Vậy với $m < -1$ thì hàm số đã cho có ba điểm cực trị.

Câu 2a (0,5 điểm).

Với điều kiện $\tan x \neq -1$, phương trình đã cho tương đương với :

$$\begin{aligned}
\sin 2x + \cos 2x - 3\sqrt{2}\sin x - 2 = 1 + \sin 2x &\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin x + 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -\sqrt{2} \text{ (loại)} \\ \sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \text{ (loại)} \\ x = \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi \;\; (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 2b (0,5 điểm).

Gọi $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$. Khi đó

$$z^2 = \sqrt{z^2 + \overline{z^2}} \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2abi = \sqrt{2a^2 - 2b^2}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = \sqrt{2a^2 - 2b^2} \\ 2ab = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = \sqrt{2a^2 - 2b^2} \\ \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

Với $a = 0 \Rightarrow b = 0$; với $b = 0 \Rightarrow a = 0$ hoặc $a = \pm\sqrt{2}$.
Vậy $z = 0$ và $z = \pm\sqrt{2}$.

Câu 3 (0,5 điểm).

Phương trình đã cho tương đương với :

$$2.2^{2x} - 3.2^x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 2 \\ 2^x = -\dfrac{1}{2} \text{ (vô nghiệm)} \end{array} \right. \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Câu 4 (1,0 điểm).

Với điều kiện $x > 0$, bất phương trình đã cho tương đương với :

$$\sqrt{x} \geqslant \frac{(x+1)(x-1)^3}{x\left[(x-1)^2 + 1\right]} \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x})^3}{x+1} \geqslant \frac{(x-1)^3}{(x-1)^2 + 1} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^3}{t^2 + 1}$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t) = \dfrac{t^4 + 3t^2}{(t^2+1)^2} \geqslant 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Lại có $f(t)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow f(\sqrt{x}) \geqslant f(x-1) \Leftrightarrow \sqrt{x} \geqslant x - 1 \Leftrightarrow 0 < x \leqslant \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left(0; \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Câu 5 (1,0 điểm).

Ta có $I = \displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x + \int_0^1 x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = I_1 + I_2$.

Đặt $u = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow u^2 = x^2 + 1 \Rightarrow u\mathrm{d}u = x\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow u = 1$; $x = 1 \Rightarrow u = \sqrt{2}$, ta có $I_1 = \displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} u^2 \mathrm{d}u = \left.\frac{u^3}{3}\right|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} - 1}{3}$.

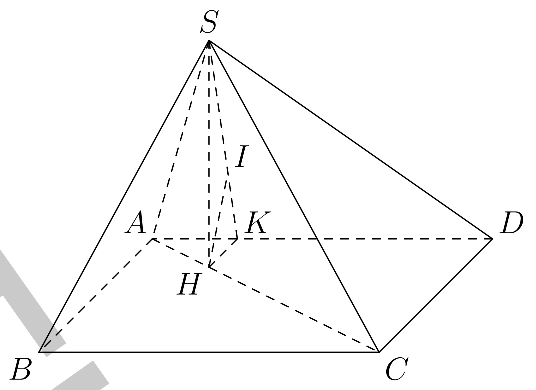
Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ x = \mathrm{e}^x \end{cases}$, ta có $I_2 = x\mathrm{e}^x\big|_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e} - \mathrm{e}^x\big|_0^1 = 1$.

Vậy $I = I_1 + I_2 = \dfrac{2\sqrt{2} - 1}{3} + 1 = \dfrac{2\sqrt{2} + 2}{3}$.

Câu 6 (1,0 điểm).

Tam giác ABD vuông cân tại A và có $BD = 2a$, suy ra $AB = AD = a\sqrt{2}$.
Đáy $ABCD$ là hình vuông nên có diện tích $S_{ABCD} = AB^2 = 2a^2$.

Gọi H là hình chiếu của S trên AC, ta có $(SAC)\perp(ABCD)$ nên $SH\perp(ABCD)$.
Tam giác SAC vuông tại S nên $SA = \sqrt{AC^2 - SC^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a$.
Từ đó suy ra $SH = \dfrac{SA.SC}{AC} = \dfrac{a.a\sqrt{3}}{2a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Do đó thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SH = \dfrac{1}{3}.2a^2.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3}{\sqrt{3}}$.



Tam giác SAH vuông tại H nên $HA = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{a}{2} \Rightarrow CA = 4HA$.
Ta có $BC||AD$, do đó $d\left(B,(SAD)\right) = d\left(C,(SAD)\right) = 4d\left(H,(SAD)\right)$.
Gọi K là hình chiếu của H trên AD, ta có $SK\perp AD$ và $HK\perp AD$ nên $AD\perp(SHK)$.
Gọi I là hình chiếu của H trên SK, ta có $HI\perp SK$ và $HI\perp AD$ nên $HI\perp(SAD)$.
Từ đó suy ra $d\left(B,(SAD)\right) = 4d\left(H,(SAD)\right) = 4HI$.
Tam giác AHK vuông cân tại K nên $HK = AH\sin 45^0 = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.
Tam giác SHK vuông tại H nên $HI = \dfrac{HS.HK}{\sqrt{HS^2 + HK^2}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{14}$.
Vậy khoảng cách từ B đến (SAD) là $d\left(B,(SAD)\right) = 4HI = \dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 7 (1,0 điểm).

Ta có $B \in BD$ nên $B(t; 12-2t) \Rightarrow \overrightarrow{MB} = (t-5; 11-2t)$, $\overrightarrow{NN} = (t-9; 9-2t)$.
Lại có $ABCD$ là hình chữ nhật và $M \in AB, N \in BC$ nên

$$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{NB} = 0 \Leftrightarrow 5t^2 - 54t + 144 = 0 \Leftrightarrow t = 6 \text{ hoặc } t = \frac{24}{5} \text{ (loại)} \Rightarrow B(6;0)$$

Đường thẳng AB có $\overrightarrow{u_{AB}} = \overrightarrow{MB} = (1;-1) \Rightarrow \overrightarrow{n_{AB}} = (1;1)$ nên có phương trình $x + y - 6 = 0$.
Đường thẳng BC có $\overrightarrow{u_{BC}} = \overrightarrow{NB} = (-3;-3) \Rightarrow \overrightarrow{n_{BC}} = (1;-1)$ nên có phương trình $x - y - 6 = 0$.
Lại có $D \in BD \Rightarrow D(t; 12-2t) \Rightarrow AD = d(D; AB) = \dfrac{|t-6|}{\sqrt{2}}$, $CD = d(D; BC) = \dfrac{3|t-6|}{\sqrt{2}}$.
Khi đó $S_{ABCD} = AD.CD = 6 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}(t-6)^2 = 6 \Leftrightarrow t = 10$ hoặc $t = 2$.
Với $t = 10 \Rightarrow D(10;-8) \Rightarrow AD: x - y - 18 = 0$, $CD: x + y - 2 = 0$.
Với $t = 2 \Rightarrow D(2;8) \Rightarrow AD: x - y + 6 = 0$, $CD: x + y - 10 = 0$.
Vậy $AB: x + y - 6 = 0, BC: x - y - 6 = 0, AD: x - y - 18 = 0, CD: x + y - 2 = 0$
hoặc $AB: x + y - 6 = 0, BC: x - y - 6 = 0, AD: x - y + 6 = 0, CD: x + y - 10 = 0$.

Câu 8 (1,0 điểm).

Ta có $M \in d_1 \Rightarrow M(1 + 2t_1; 3 - 3t_1; 2t_1)$, $N \in d_2 \Rightarrow N(5 + 6t_2; 4t_2; -5 - 5t_2)$.
Suy ra $\overrightarrow{MN} = (4 - 2t_1 + 6t_2; -3 + 3t_1 + 4t_2; -5 - 2t_1 - 5t_2)$.

Vì $MN||(P)$ nên ta có :

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{n_{(P)}} = 0 \Leftrightarrow 4 - 2t_1 + 6t_2 - 2(-3 + 3t_1 + 4t_2) + 2(-5 - 2t_1 - 5t_2) = 0 \Leftrightarrow t_1 = -t_2$$

Lại có $d(MN, (P)) = d(M, (P)) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{|1 + 2\mathrm{t}_1 - 2\,(3 - 3t_1) + 4t_1|}{3} = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_1 = 0 \end{array}\right.$.

Với $t_1 = 0 \Rightarrow t_2 = 0 \Rightarrow M(1; 3; 0), N(5; 0; -5)$, $t_1 = 1 \Rightarrow t_2 = -1 \Rightarrow M(3; 0; 2), N(-1; -4; 0)$.

Vậy $M(1; 3; 0), N(5; 0; -5)$ hoặc $M(3; 0; 2), N(-1; -4; 0)$.

Câu 9 (0,5 điểm).

Với điều kiện $n \in \mathbb{Z}, n \geq 4$ ta có

$$C_n^4 = 13C_n^{n-2} \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = \frac{13n(n-1)}{2!} \Leftrightarrow n^2 - 5n - 150 = 0 \Leftrightarrow n = 15$$

Với $n = 15$ ta có $\left(x^3 - \dfrac{1}{x^2}\right)^n = \left(x^3 - \dfrac{1}{x^2}\right)^{15} = \displaystyle\sum_{k=0}^{15} C_{15}^k \left(x^3\right)^{15-k} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k (-1)^k x^{45-5k}$.

Số hạng chứa x^{10} là số hạng chứa x^k thỏa mãn $45 - 5k = 10 \Leftrightarrow k = 7$.

Vậy hệ số của số hạng chứa x^{10} là $C_{15}^7 (-1)^7 = -6435$.

Câu 10 (1,0 điểm).

Từ giả thiết $ab + bc + ca = 1$ ta có $a^2 + 1 = a^2 + ab + bc + ca = a(a + b) + c(b + a) = (a + b)(a + c)$.

Tương tự $b^2 + 1 = (b + c)(b + a)$ và $c^2 + 1 = (c + a)(c + b)$.

Từ đó suy ra :

$$\begin{aligned} \frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} &= \frac{a}{(a+b)(a+c)} + \frac{b}{(b+c)(b+a)} = \frac{1+ab}{\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}} \\ &= \frac{1+ab}{\sqrt{(1+ab)^2 + (a-b)^2}}.\frac{1}{\sqrt{c^2+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{c^2+1}} \end{aligned}$$

Hay $\dfrac{2a}{a^2+1} + \dfrac{2b}{b^2+1} + \dfrac{c^2-1}{c^2+1} \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{c^2+1}} + \dfrac{c^2-1}{c^2+1} = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{c^2+1}} - \dfrac{2}{c^2+1}$.

Xét hàm số $f(t) = 1 + \dfrac{2}{t} - \dfrac{2}{t^2}$ trên $[1; +\infty)$ có $f'(t) = -\dfrac{2}{t^2} + \dfrac{4}{t^3}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Bảng biến thiên :

t	1		2		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1

Từ bảng biến thiên ta có $\max\limits_{[1;+\infty)} f(t) = f(2) = \dfrac{3}{2}$ hay $1 + \dfrac{2}{\sqrt{c^2+1}} - \dfrac{2}{c^2+1} \leqslant \dfrac{3}{2}$.

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

——— Hết ———